

*А. К. Толпыго*



# Тысяча задач

*Международного математического  
Турнира городов*



А. К. Толпыго

Тысяча задач  
Международного математического  
Турнира городов

Издание второе, дополненное

Москва  
Издательство МЦНМО  
2010

УДК 51  
ББК 74.200.58:22.1  
Т52

**Толпыго А. К.**

**Т52** Тысяча задач Международного математического Турнира городов. 2-е изд. доп., — М.: МЦНМО, 2010. — 488 с.  
ISBN 978-5-94057-580-1

Турнир городов — крупнейшее математическое соревнование школьников, проводящееся вот уже 30 лет. Его уникальность в том, что он доступен школьникам всего мира. Трудность задач самая разнообразная — от совсем легких до исключительно трудных, которые иной раз удавалось решить только 1-2 участникам.

В настоящей книге представлены все задачи 30 турниров с краткими указаниями. Автор — один из «отцов-основателей» Турнира и его бессменный организатор на протяжении всех этих лет.

Первое издание книги вышло в 2009 г.

ББК 74.200.58:22.1

ISBN 978-5-94057-580-1

© Толпыго А. К., 2010.  
© МЦНМО, 2010.

## Оглавление

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| Предисловие . . . . .                                                 | 5  |
| I Турнир городов (Олимпиада трех городов, 1980) . . . . .             | 19 |
| Указания и решения (233)                                              |    |
| II Турнир городов (1981) . . . . .                                    | 21 |
| Указания и решения (235)                                              |    |
| III Турнир городов (1982) . . . . .                                   | 23 |
| Указания и решения (237)                                              |    |
| IV Турнир городов (1982/83) . . . . .                                 | 25 |
| Осень, 1982 год (25). Весна, 1983 год (26). Указания и решения (240)  |    |
| V Турнир городов (1983/84) . . . . .                                  | 30 |
| Осень, 1983 год (30). Весна, 1984 год (31). Указания и решения (246)  |    |
| VI Турнир городов (1984/85) . . . . .                                 | 35 |
| Осень, 1984 год (35). Весна, 1985 год (37). Указания и решения (253)  |    |
| VII Турнир городов (1985/86) . . . . .                                | 41 |
| Осень, 1985 год (41). Весна, 1986 год (44). Указания и решения (260)  |    |
| VIII Турнир городов (1986/87) . . . . .                               | 47 |
| Осень, 1986 год (47). Весна, 1987 год (49). Указания и решения (265)  |    |
| IX Турнир городов (1987/88) . . . . .                                 | 52 |
| Осень, 1987 год (52). Весна, 1988 год (54). Указания и решения (272)  |    |
| X Турнир городов (1988/89) . . . . .                                  | 59 |
| Осень, 1988 год (59). Весна, 1989 год (62). Указания и решения (281)  |    |
| XI Турнир городов (1989/90) . . . . .                                 | 66 |
| Осень, 1989 год (66). Весна, 1990 год (69). Указания и решения (290)  |    |
| XII Турнир городов (1990/1991) . . . . .                              | 74 |
| Осень, 1990 год (74). Весна, 1991 год (77). Указания и решения (299)  |    |
| XIII Турнир городов (1991/92) . . . . .                               | 81 |
| Осень, 1991 год (81). Весна, 1992 год (84). Указания и решения (309)  |    |
| XIV Турнир городов (1992/93) . . . . .                                | 89 |
| Осень, 1992 год (89). Весна, 1993 год (92). Указания и решения (318)  |    |
| XV Турнир городов (1993/94) . . . . .                                 | 97 |
| Осень, 1993 год (97). Весна, 1994 год (100). Указания и решения (329) |    |

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| XVI Турнир городов (1994/95) . . . . .                                 | 105 |
| Осень, 1994 год (105). Весна, 1995 год (108). Указания и решения (339) |     |
| XVII Турнир городов (1995/96) . . . . .                                | 112 |
| Осень, 1995 год (112). Весна, 1996 год (116). Указания и решения (351) |     |
| XVIII Турнир городов (1996/97) . . . . .                               | 120 |
| Осень, 1996 год (120). Весна, 1997 год (123). Указания и решения (361) |     |
| XIX Турнир городов (1997/98) . . . . .                                 | 128 |
| Осень, 1997 год (128). Весна, 1998 год (131). Указания и решения (371) |     |
| XX Турнир городов (1998/99) . . . . .                                  | 137 |
| Осень, 1998 год (137). Весна, 1999 год (141). Указания и решения (381) |     |
| XXI Турнир городов (1999/2000) . . . . .                               | 146 |
| Осень, 1999 год (146). Весна, 2000 год (150). Указания и решения (392) |     |
| XXII Турнир городов (2000/01) . . . . .                                | 154 |
| Осень, 2000 год (154). Весна, 2001 год (157). Указания и решения (402) |     |
| XXIII Турнир городов (2001/02) . . . . .                               | 163 |
| Осень, 2001 год (163). Весна, 2002 год (167). Указания и решения (415) |     |
| XXIV Турнир городов (2002/03) . . . . .                                | 172 |
| Осень, 2002 год (172). Весна, 2003 год (176). Указания и решения (427) |     |
| XXV Турнир городов (2003/04) . . . . .                                 | 180 |
| Осень, 2003 год (180). Весна, 2004 год (183). Указания и решения (437) |     |
| XXVI Турнир городов (2004/05) . . . . .                                | 188 |
| Осень, 2004 год (188). Весна, 2005 год (192). Указания и решения (446) |     |
| XXVII Турнир городов (2005/06) . . . . .                               | 197 |
| Осень, 2005 год (197). Весна, 2006 год (200). Указания и решения (454) |     |
| XXVIII Турнир городов (2006/07) . . . . .                              | 204 |
| Осень, 2006 год (204). Весна, 2007 год (208). Указания и решения (462) |     |
| XXIX Турнир городов (2007/08) . . . . .                                | 213 |
| Осень, 2007 год (213). Весна, 2008 год (217). Указания и решения (473) |     |
| XXX Турнир городов (2008/09) . . . . .                                 | 222 |
| Осень, 2008 год (222). Весна, 2009 год (226). Указания и решения (481) |     |

# Предисловие

## Как это начиналось

Иных уж нет, а те далече,  
Как Сади некогда сказал...

Созданный в 1980 году Турнир городов приближается к своему 30-летию. Сейчас он проводится в течение года и в нем участвуют все континенты, кроме Антарктиды. Но весной 1980 года никто ничего подобного не замышлял.

Тогда как раз заканчивался процесс ликвидации старого состава жюри Всесоюзной олимпиады. После того как студенты, аспиранты, молодые преподаватели Коля Васильев, Марк Башмаков, Коля Константинов, Толя Савин, Гарник Тоноян, Дима Фукс и прочие (не могу перечислить всех и потому приношу глубочайшие извинения неназванным) создали олимпиаду, придали ей престиж и высокий уровень, в Минпросе было решено, что ею могут руководить и другие люди. Людей, создавших олимпиаду, из жюри вывели, назначили новых.

Я представлял в жюри Украину. Поэтому лично я легко мог бы удержаться и в новом составе. Но новое руководство олимпиады мне решительно не нравилось, я сказал: «Блажен муж, иже не идет на совет нечестивых» — или что-то в этом роде, и попросил украинский Минпрос подыскать мне замену.

Со Всесоюзной олимпиады я ушел, но у меня остались московские друзья, которые затевали самые разнообразные новые мероприятия. Вот например: в Москве очень много сильных школьников, которые могли бы довольно успешно выступать на Всесоюзной олимпиаде, но не выступают, так как команда Москвы насчитывает всего лишь 6 человек. Так пусть они выступают в Москве! И москвичи стали получать задачи Всесоюзной олимпиады по телефону. В самый день олимпиады кто-то созванивался с Ташкентом или Тбилиси, записывал условия задач, которые только что были розданы участникам олимпиады, приносил их в класс — и 40 или 80 московских школьников становились как бы соучастниками Всесоюзной олимпиады. Они решали те же задачи, точно так же, как их товарищи вдали, только премий не получали.

И тут, как сказал бы Михаил Булгаков, подвернулся я. Услышав об этом, я спросил: «А нельзя ли и в Киев передать задачи? Мы бы их тоже решали».

Меня заверили, что это вполне возможно, но, как выяснилось, считали мы без хозяина. Через неделю мне позвонили в Киев и сообщили: новый состав Всесоюзного жюри не считает возможным передавать задачи в Москву (а тем более в Киев).

Досадно... Но идея уже родилась, и не хотелось от нее отказываться. Раз мы не можем пользоваться задачами Всесоюзной — отчего бы нам самим не составить набор задач, тем более что мы составим ничуть не хуже? Давайте возьмемся!

Так это началось. Первый Турнир (он назывался еще «Олимпиадой трех городов» — Москва, Киев и Рига) был проведен тогда же, т. е. весной 1980 года, параллельно Всесоюзной олимпиаде, но по другим задачам. Потом он стал расти. Если в «Олимпиаде трех городов» фактически участвовало только 2 города (Рига участвовала номинально, только в подборе задач), то через несколько лет — уже десятки. Турнир вышел за рамки Советского Союза, потом — за рамки Европы... Бессменным его руководителем все эти годы был Николай Константинов, вклад которого в математическое образование (притом — в мировом масштабе) вообще трудно переоценить. Я не могу здесь перечислить всех людей, внесших внушительный вклад в эту 30-летнюю работу; однако читатель встретит все или почти все их фамилии среди авторов задач.

Кроме наших современников читатель встретит среди авторов также и нескольких великих математиков прошлого (см., например, задачи XIV.27 или XX.25; в последнем случае задача представляет собой ключевую, хотя и вполне элементарную, лемму из разработанной Анри Лебегом теории меры).

Попутно с расширением Турнира ставились разные организационные эксперименты, иногда удачные, иногда не очень. Например: запретить решать более 3 задач (чтобы не распылялись); разрешить школьникам писать (и сдавать) коллективную работу (оказалось, что от такой работы слишком много шума в классе), и др. Турнир стали проводить дважды в год: осенью и весной. А поскольку задачи достаточно трудны, решено было наряду с «основным» туром устраивать еще и «тренировочный». Замечу, что это название оказалось неудачным, так как большинство школьников склонны считать «тренировку» недостойным занятием, хотя дай им бог хоть на тренировочном-то решить что-нибудь!

Неудачей окончилась и попытка давать основной и тренировочный туры параллельно. В итоге мы пришли к тому, что в году проходит 4 тура: два осенью и два весной.

Таким образом, сейчас Турнир стал всемирным и длится почти весь год, начинаясь в октябре и заканчиваясь летом очередной Летней конференцией Турнира. Четырежды в году школьники разных городов в разных странах и на разных континентах в один день и, насколько позволяет география, в один час собираются — как правило, в одной из городских школ — и решают одни и те же задачи. Замечу кстати, что идея проводить Турнир городов (а не стран), возникшая по совершенно случайным обстоятельствам, оказалась весьма удачной в том смысле, что политические пертурбации 1990-х, распад государств никак не сказались на Турнире. В развитие этого принципа ниже я не указываю страну, в которой находится тот или иной город.

Добавлю к сказанному кое-какие сведения о том, как именно проходят Турниры в разных городах<sup>1</sup>.

В Северной Америке число участников обычно невелико. Как рассказывал представитель Канады Энди Лю, в Эдмонтоне участвует обычно человек 10 («если 20 — они прыгают от радости»). При этом сами учителя не хотят, чтобы их ученики ходили на Турнир, потому что после Турнира они спрашивают у учителей, как решать эти задачи, а учителя (что, кстати, совершенно естественно) ответить не могут.

В Азии, где профессия учителя очень престижна, ситуация иная. На Тайване участие в Турнире платное. Деньги не очень большие, 200 тайваньских долларов, что примерно соответствует 200 российским рублям, но характерен сам факт. При этом на Тайване в 2004/05 году в Турнире приняло участие 2200 человек, которые съехались со всего острова в три города.

В Минске на Турнир приходит порядка 1500 человек, однако половина, по словам организаторов, приходит по распоряжению своих учителей и, отметившись, тут же уходит. Однако я должен заметить, что и 700 добровольных участников — цифра весьма внушительная.

В Аргентине (как рассказал Н. Константинов) турниром заправляют четыре женщины. При этом школьники для участия съезжаются со всей страны, даже с Огненной Земли. Когда Кон-

---

<sup>1</sup>На основе выступлений в ходе общей дискуссии на Летней конференции Турнира в 2005 году в городе Мир в Белоруссии.



стантинов выразил удивление, как они смогли сделать так много — бразильский профессор вздохнул и сказал: «Ведь у них много людей»... Сам он работает в одиночку.

Турнир, как и всякое соревнование, выработал свой стиль. Если задачи на раскраску, на четность или делимость на подходящее число встречаются примерно с одинаковой частотой на любом соревновании юных математиков, то на Турнире (и здесь он заметно отличается от других подобных ему соревнований) часто предлагается построить контрпример к какому-то более или менее очевидному утверждению. (См. например, задачи VIII.10; XI.15; XVII.40; XX.10; XX.21; XX.39; XXII.21, XXV.10; XXVII.40.) Замечу, что при этом чаще, чем в других математических соревнованиях, появляются задачи, требующие совершенно зубодробительной конструкции в качестве примера или, напротив, в качестве доказательства (таковы, например, задачи XIV.20, XXII.44 и др.).

Впрочем, ситуацию с «зубодробительными конструкциями» облегчает то обстоятельство, что никто не обязан их решать. Согласно правилам Турнира, школьнику засчитывается не более трех задач (даже если он решит все 6 или 7). Смысл такого ограничения в том, чтобы никто не пытался решить всё, а выбрал себе задачу по вкусу — в конце концов, есть и любители заковыристых конструкций — и занялся ею всерьез. В этом смысле Турнир, хотя бы в слабой мере, сближается с работой настоящего математика, который решает одну задачу, и не пять, а пять тысяч часов.

Из других идей, часто встречающихся в задачах, хочу отметить идею «дискретной теоремы Коши» (например, XXIII.7); в таких задачах обычно надо заметить, что некая величина принимает только целые значения, притом разных знаков, за один шаг меняется не более чем на единицу и, следовательно, переходит через нуль.

И еще одно замечание. По задачам Турнира иной раз можно следить не только за идеями математического образования, но и за политической ситуацией. По этому поводу отсылаю читателя, например, к задачам XIII.23 или XV.31.

## Подведение итогов

Школьников, конечно же, очень интересовал результат: «Как я выступил?» и «Как выступил мой город?».

В первых двух Турнирах (1980 и 1981 год) оценка результатов проводилась по традиционной для олимпиад системе «плюс-

минусов», и потому сравнить результаты было невозможно или очень трудно. Поэтому начиная с третьего турнира была введена система баллов.

Чтобы большие города не имели преимуществ над малыми, с самого начала было решено, что число зачетных участников от города равно  $N/100\,000$ , т.е. от ста тысяч жителей — один зачетный участник, если население не меньше 500 тысяч; при меньшем населении от города должно быть 5 зачетных участников (т.е. тех, кто выступил лучше всех), но результат города умножается на поправочный коэффициент. Попутно замечу, что существует еще один поправочный коэффициент: поскольку 8- и 9-классникам<sup>2</sup> дают одни и те же задачи, то для «уравнивания шансов» 8-классники имеют льготный коэффициент  $4/3$ , т.е. их результат умножается на  $4/3$ . Аналогично 10-классники имеют по сравнению с 11-классниками коэффициент  $5/4$ .

Но эта книга — сборник задач, и только. Поэтому я лишь вскользь упомянул о Летней конференции Турнира, и поэтому же здесь я не буду ни перечислять победителей, ни даже приводить баллы, которые выставлялись за разные задачи. Но все-таки интересно же, как именно выступили разные города?

Непосредственно сравнивать результаты разных лет бессмысленно, так как, даже если не говорить о разной трудности задач в разные годы, многое зависело просто от того, сколько баллов давалось за задачи: от 3 до 7 или от 20 до 50. Вспоминается, как Минпрос решил сравнить результаты олимпиад по математике, физике и химии; математики подсчитали баллы, вывели средний, а потом Савин сказал: «А теперь давайте все баллы умножим на десять...»

Я думаю, что сравнить все-таки можно. Примем условно, что Москва всегда выступала одинаково (для определенности — что Москва всегда получала по своим 89 зачетным участникам балл 100). Такой подход более или менее разумен исходя из того, что Москва — город большой и «реальное среднее» по 89 участникам вряд ли так уж сильно колебалось. Соответственно, «приведем» все результаты всех городов к результату Москвы (см. ниже).

---

<sup>2</sup>В 1980-е годы обучение в СССР было 10-летним, и «старшими» считались 9—10 классы, а «младшими» — 7—8 классы.

## Итоги турниров городов

В I Турнире принимали участие школьники двух городов: Киева и Москвы. Участие Риги состояло в том, что рижане прислали некоторые задачи для Турнира.

Во II Турнире участвовали 10 городов: Донецк, Киев, Ленинград, Москва, Омск, Пермь, Рига, Свердловск, Тула, Харьков.

Данные о турнирах с III по XVI приведены ниже.

Каждому городу отведена строка. После названия города указан результат города в баллах; звездочка показывает, что город участвовал в данном Турнире, но баллы неизвестны.

Для унификации результат Москвы всюду оценен в 100 баллов. Результаты остальных городов отнесены к результату Москвы и округлены до целого. Например, результат Киева на IV Турнире городов (1983 год) — 31 балл, Москвы — 19,3, соответственно относительный результат Киева в 1983 году равен  $100 \times 31 : 19,3 = 160,6 \dots \approx 161$ .

## Сводные таблицы

Итоги III—IX Турниров городов (1982—1988 гг.)

| Номер турнира | III  | IV   | V       | VI      | VII     | VIII    | IX      |
|---------------|------|------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Год           | 1982 | 1983 | 1983/84 | 1984/85 | 1985/86 | 1986/87 | 1987/88 |
| Абакан        | 57   |      |         |         |         |         |         |
| Алма-Ата      |      |      |         |         | 59      | 57      | 75      |
| Белорецк      |      |      |         | 136     | 178     | 187     | 188     |
| Благовещенск  |      |      | 62      | 24      | 7       |         |         |
| Брянск        |      | 89   |         |         |         |         |         |
| Варна         |      |      |         |         | 84      | 98      |         |
| Владивосток   |      |      |         |         | 32      | 43      | 35      |
| Волгоград     |      |      | 45      | 40      | 8       | 35      |         |
| Волжский      |      |      |         | 48      | 14      | 25      |         |
| Вологда       | *    | 131  | 73      |         |         |         |         |
| Воткинск      |      |      |         |         | 39      | 84      | 63      |
| Выру          | *    |      |         |         |         |         |         |
| Гродно        |      |      |         |         | 31      | 36      | 58      |
| Донецк        | *    |      | 45      |         | 51      |         | 45      |

*Продолжение таблицы*

| Номер<br>турнира    | III  | IV   | V       | VI      | VII     | VIII    | IX      |
|---------------------|------|------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Год                 | 1982 | 1983 | 1983/84 | 1984/85 | 1985/86 | 1986/87 | 1987/88 |
| Евпатория           |      |      |         |         |         | 195     | 155     |
| Ереван              |      |      |         | 47      |         |         | 53      |
| Зелена Гура         |      |      |         |         | 98      | 107     | 124     |
| Зеленодольск        |      |      |         |         |         | 4       |         |
| Ижевск<br>(Устинов) |      | 26   | 69      | 62      | 51      | 62      | 62      |
| Казанлык            |      |      |         |         |         |         | 214     |
| Казань              |      |      |         | 37      | 38      | 58      | 63      |
| Калинин             |      |      |         | 43      | 36      |         |         |
| Киев                | 147  | 161  | 77      | 71      | 89      | 92      | 95      |
| Киров               | 50   |      |         | 59      | 56      | 93      | 119     |
| Кострома            |      |      |         |         | 53      | 72      | 64      |
| Краснодар           |      |      | 80      | 54      | 35      | 43      | 45,5    |
| Ленинград           | 107  |      | 76      | 127     | 73,5    | 62      | 94      |
| Лодзь               |      |      |         |         | 24      |         |         |
| Львов               | 167  | 147  | 75      | 79      | 63      | 65      | 71      |
| Минск               |      |      | 59      |         |         |         |         |
| Москва              | 100  | 100  | 100     | 100     | 100     | 100     | 100     |
| Нижний<br>Тагил     |      |      |         |         |         | 75      | 64      |
| Новосибирск         |      |      |         |         | 41      | 50      | 54      |
| Одесса              |      |      |         | 102     | 85      | 45      | 49      |
| Омск                |      |      |         |         |         |         |         |
| Пермь               | 92   |      | 52      |         | 33      | 35      |         |
| Петрозаводск        | *    | 83   | 31      | 50      | 26      | 29      |         |
| Пловдив             |      |      |         |         |         | 115     | 90      |
| Рига                | 228  | 352  | 154     | 147     | 115     | 177     | 122     |
| Ростов-на<br>Дону   |      |      |         | 22      |         |         |         |
| Русе                |      |      |         |         | 110     | 146     | 106     |
| Саратов             |      |      |         | 56      | 43      |         |         |
| Свердловск          | 133  | 136  | 52      | 89      | 47      | 18      | 55      |

*Продолжение таблицы*

| Номер турнира              | III       | IV        | V         | VI        | VII       | VIII      | IX        |
|----------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Год                        | 1982      | 1983      | 1983/84   | 1984/85   | 1985/86   | 1986/87   | 1987/88   |
| Севастополь                |           |           | 88        | 100       | 89        | 118       | 81        |
| Симферополь                |           |           |           |           |           |           | 59        |
| София                      |           |           |           |           |           | 106       | 99        |
| Стара Загора               |           |           |           |           |           |           | 100       |
| Таллин                     | *         |           |           |           | 28        |           |           |
| Тарту                      | 139       |           |           | 86        | 84        |           |           |
| Тула                       |           |           |           |           |           |           |           |
| Фрунзе                     |           |           |           | 49        | 42        | 28        |           |
| Хабаровск                  | *         |           |           |           |           |           |           |
| Харьков                    |           |           |           |           | 75        | 87        | 75        |
| Целиноград                 |           | 145       | 45        | 40        | 26        | 30        | 44        |
| Челябинск                  |           |           | 56        | 42        | 40        | 59        | 75        |
| Череповец                  |           |           |           | 50        |           | 25        | 44        |
| Ямбол                      |           |           |           |           | 148       | 108       | 112       |
| Ярославль                  |           |           | 50        | 44        | 32        | 27        | 19        |
| <b>Общее число городов</b> | <b>16</b> | <b>10</b> | <b>19</b> | <b>27</b> | <b>39</b> | <b>38</b> | <b>36</b> |

Итоги X—XVI Турниров городов (1988—1995 гг.)

| Номер турнира       | X       | XI      | XII     | XIII    | XIV     | XV      | XVI     |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Год                 | 1988/89 | 1989/90 | 1990/91 | 1991/92 | 1992/93 | 1993/94 | 1994/95 |
| Акмола (Целиноград) | 77      | 85      | 46      | 59      | 82      | 80      | 97      |
| Алма-Ата (Алматы)   | 68      | 113     | 103     | 69      | 80      |         | 92      |
| Ангарск             |         |         |         | 112     | 178     | 147     | 128     |
| Армавир             |         | 26      | 117     | 100     | 123     | 158     | 243     |
| Байя Бланка         |         |         |         |         |         | 89      | 129     |
| Баку                |         |         | 88      | 80      |         |         |         |
| Белорецк            | 204     | 236     | 180     | 197     | 99      | 166     | 204     |
| Бердск              | 27      | 69      | 88      | 64      | 84      | 103     | 57      |

*Продолжение таблицы*

| Номер<br>турнира   | X       | XI      | XII     | XIII    | XIV     | XV      | XVI     |
|--------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Год                | 1988/89 | 1989/90 | 1990/91 | 1991/92 | 1992/93 | 1993/94 | 1994/95 |
| Бирмингем          |         |         |         |         | 86      | 107     | 111     |
| Бишкек<br>(Фрунзе) |         |         | 70      | 52      | 37      | 61      |         |
| Богота             |         |         | 33      | 30      | 37      | 53      | 46      |
| Брашов             | 79      | *       |         |         |         |         |         |
| Букамаранга        |         |         |         |         |         | 59      | 79      |
| Бургас             |         | 107     |         |         |         |         |         |
| Буэнос-Айрес       |         |         |         |         |         | 61      | 76      |
| Вальядолид         |         |         |         | 70      |         |         |         |
| Варна              |         | 286     | *       | *       |         | 218     |         |
| Велико Тырново     | 168     | 218     | 163     | 231     | 216     | 257     | 200     |
| Верхняя Салда      |         |         | 85      | 64      | 116     | 86      | 9       |
| Вильнюс            |         | 60      |         |         |         |         |         |
| Винница            | 193     | 235     | 223     | 132     | 118     | 110     | 139     |
| Волгоград          |         | 70      | 56      | 64      | 97      |         | 78      |
| Волгодонск         |         |         |         |         | 138     | 77      |         |
| Волжский           |         |         |         | 72      |         |         |         |
| Вологда            |         | 35      | 80      | 71      | 38      | 84      | 113     |
| Вондроже<br>Вельке |         | *       |         | 31      |         |         |         |
| Воронеж            | 51      | 81      | 78      | 53      | 64      |         |         |
| Враца              |         |         |         | 117     |         | 211     |         |
| Гамбург            |         | 118     | 80      | 74      | 118     | 64      | 126     |
| Горячий Ключ       |         |         |         |         |         | 54      | 28      |
| Грац               |         |         |         |         | 117     | 104     | 61      |
| Гродно             |         | *       |         |         |         |         |         |
| Данидин            |         |         |         | 92      | 124     | 99      |         |
| Дарэм              |         |         |         |         | 143     |         |         |
| Даугавпилс         |         |         |         | 49      |         |         |         |
| Днепропетровск     |         |         |         |         | 74      | 77      | 32      |
| Долгопрудный       |         |         |         |         |         |         | 167     |
| Донецк             | 48      | 46      | 112     |         | 133     |         | 77      |

*Продолжение таблицы*

| Номер<br>турнира     | X       | XI      | XII     | XIII    | XIV     | XV      | XVI     |
|----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Год                  | 1988/89 | 1989/90 | 1990/91 | 1991/92 | 1992/93 | 1993/94 | 1994/95 |
| Дэнтон               |         |         |         |         |         |         | 117     |
| Евпатория            | 176     | 208     | 312     | 193     |         |         |         |
| Екабпилс             |         |         |         | 111     |         |         |         |
| Екатеринбург         |         |         |         | 41      | 75      | 91      | 96      |
| Ереван               | 88      | 141     | 88      | 129     | 120     | 100     | 192     |
| Жуковский            |         |         |         |         |         | 167     | 193     |
| Запорожье            |         |         |         |         |         |         | 101     |
| Зелена Гура          | 77      | 177     | 125     | 85      | 142     | 165     |         |
| Иваново              |         |         |         |         | 120     | 128     | 154     |
| Иерусалим            |         |         | 107     |         | 141     |         |         |
| Ижевск               | 88      | 124     | 117     | 74      | 111     | 101     | 126     |
| Израиль              |         |         |         |         |         | 99      | 123     |
| Искитим              | 7       | 10      |         |         |         |         |         |
| Казанлык             | 137     | 173     |         | 89      |         |         |         |
| Казань               | 66      | 17      |         |         | 107     | 98      | 114     |
| Калгари              |         |         |         |         |         |         | 97      |
| Калуга               | 73      |         |         | 80      |         | 105     | 137     |
| Канберра             | 94      | 195     | 121     | 139     | 214     | 159     | 150     |
| Караганда            |         | 98      | 99      | 68      |         |         |         |
| Киев                 | 91      | 141     | 147     | 106     | 134     | 79      | 124     |
| Кинешма              |         |         |         |         |         |         | 25      |
| Киров                | 110     | 163     | 116     | 129     | 195     | 140     | 186     |
| Кирово-Чепецк        |         |         |         |         |         | 150     | 160     |
| Кишинев              |         |         | 29      |         |         |         |         |
| Колорадо-<br>Спрингс |         | 60      |         |         |         |         |         |
| Кострома             | 47      | 69      |         |         |         |         |         |
| Крайстчерч           |         |         |         | 123     | 53      | 125     | 163     |
| Краснодар            | 32      | 97      | 78      | 79      | 134     | 104     | 105     |
| Краснотурьинск       |         | 102     |         | 78      | 49      |         |         |
| Красноярск           |         | 67      | 62      | 46      |         | 58      | 102     |
| Кропоткин            |         |         |         | 42      | 76      | 128     | 178     |

*Продолжение таблицы*

| Номер<br>турнира         | X       | XI      | XII     | XIII    | XIV     | XV      | XVI     |
|--------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Год                      | 1988/89 | 1989/90 | 1990/91 | 1991/92 | 1992/93 | 1993/94 | 1994/95 |
| Куйбышев                 |         | *       |         |         |         |         |         |
| Легница                  |         |         | 115     | 89      |         |         |         |
| Лонсестон                |         |         |         |         | 148     |         |         |
| Луга                     |         |         | 132     | 75      |         |         |         |
| Любин                    | 63      |         |         |         |         |         |         |
| Любляна                  |         |         | 64      | 75      | 82      | 99      | 124     |
| Марибор                  |         |         | 30      | 42      |         |         |         |
| Мельбурн                 |         | 57      |         |         |         |         |         |
| Люксембург               |         |         |         |         |         | 31      | 26      |
| Москва                   | 100     | 100     | 100     | 100     | 100     | 100     | 100     |
| Мукачево                 |         |         |         |         | 53      |         |         |
| Нарва                    |         |         |         |         |         | 121     | 114     |
| Нижний<br>Новгород       |         |         |         |         |         | 23      | 21      |
| Нижний Тагил             | 81      | 126     | 121     | 115     | 100     | 159     | 150     |
| Нова Горица              |         |         | 23      | 12      |         |         |         |
| Ново Место               |         |         | 28      | 41      |         |         |         |
| Нови Сад                 |         |         |         |         |         |         | 334     |
| Новороссийск             |         |         |         |         |         | 81      |         |
| Новосибирск              | 34      | 101     | 70      | 61      | 86      | 45      | 82      |
| Норильск                 |         |         |         | 42      | 99      | 70      | 60      |
| Нью-Йорк                 |         |         | 42      | 33      | 20      |         |         |
| Ньюкасл                  |         | 65      | 69      | 60      | 76      | 87      | 108     |
| Одесса                   | 33      | 116     | 81      |         | 61      | 75      | 83      |
| Олайне                   |         |         |         | 106     |         |         |         |
| Омск                     |         |         |         | 80      | 99      | 91      | 105     |
| Оснабрюк                 |         |         | 62      |         |         |         |         |
| Остин                    |         |         |         |         |         |         | 106     |
| Первоуральск             | 99      | 148     | 47      |         |         |         | 98      |
| Переславль-<br>Залесский |         |         |         |         |         | 89      | 78      |
| Перт                     |         |         |         |         |         | 83      | 88      |



*Продолжение таблицы*

| Номер<br>турнира                   | X       | XI      | XII     | XIII    | XIV     | XV      | XVI     |
|------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Год                                | 1988/89 | 1989/90 | 1990/91 | 1991/92 | 1992/93 | 1993/94 | 1994/95 |
| Петрозаводск                       |         | 81      |         |         |         | 77      | 114     |
| Плевен                             |         | 160     | 87      | 102     | 127     | 156     | 31      |
| Подольск                           |         |         |         |         | 86      | 111     |         |
| Пущино                             |         |         |         |         |         | 41      |         |
| Раменское                          |         |         |         |         |         | 120     | 117     |
| Рига                               | 145     | 215     | 206     | 165     |         |         |         |
| Русе                               | 195     | 187     | 67      | 181     | 270     | 141     | 168     |
| Рыбинск                            |         |         |         |         | 29      |         |         |
| Рязань                             |         |         |         |         | 153     | 109     | 147     |
| Салоники                           |         |         |         |         |         | 73      |         |
| Санкт-<br>Петербург<br>(Ленинград) | 64      | 74      | 70      | 69      | 121     | 120     | 128     |
| Севастополь                        |         | 87      |         |         |         |         |         |
| Силистра                           |         |         | 100     | 78      | 134     |         |         |
| Симферополь                        | 82      | 57      |         |         | 63      |         |         |
| Скопье                             |         |         |         |         | 84      | 87      |         |
| Сосновый Бор                       |         | 150     | 93      | 85      | 105     | 161     | 137     |
| София                              | 135     | 114     |         |         |         | 170     | 79      |
| Стара Загора                       | 139     | 134     | 152     |         | 193     | 105     | 86      |
| Суботица                           |         |         |         |         | 85      | 204     | 193     |
| Таллин                             |         | 26      | 47      |         | 95      | 77      |         |
| Тарту                              |         | 111     |         |         | 133     | 118     | 67      |
| Тбилиси                            | 70      | 107     | 90      |         | 40      |         |         |
| Тверь<br>(Калинин)                 | 71      | 97      | 57      | 40      |         | 50      | 114     |
| Тель-Авив                          |         |         |         |         | 131     |         |         |
| Тихвин                             |         |         | *       | 122     | 81      | 167     | 192     |
| Тобольск                           |         |         |         |         |         |         | 142     |
| Томск                              | 36      | 103     |         |         | 41      | 57      |         |
| Торонто                            |         |         |         |         |         |         | 57      |
| Трой                               |         |         |         |         |         |         | 78      |

Продолжение таблицы

| Номер турнира              | X         | XI        | XII       | XIII      | XIV       | XV        | XVI       |
|----------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Год                        | 1988/89   | 1989/90   | 1990/91   | 1991/92   | 1992/93   | 1993/94   | 1994/95   |
| Тувумба                    |           |           |           | 68        | 54        | 50        |           |
| Тула                       | 77        | 117       | 90        | 62        | 41        | 105       | 117       |
| Ужгород                    |           |           |           |           | 231       | 225       | 27        |
| Уфа                        |           |           |           |           |           | 73        | 85        |
| Фессалоники                |           |           | 26        |           |           |           |           |
| Форталеза                  |           |           |           |           |           |           | 67        |
| Хайфа                      |           |           | 78        |           | 200       |           |           |
| Харьков                    |           |           |           | 74        |           |           | 125       |
| Хасково                    |           |           |           | 68        |           |           |           |
| Хобарт                     |           | 79        | 140       | 118       | 171       | 149       | 186       |
| Целье                      |           |           | 49        | 26        |           |           |           |
| Челябинск                  |           | 138       | 100       | 80        | 135       | 128       | 129       |
| Череповец                  | 6         |           |           | 66        | 57        | 128       | 127       |
| Шарлотт                    |           |           | 166       | 100       | 142       | 75        | 14        |
| Шумен                      |           | 152       |           |           |           |           |           |
| Эдмонтон                   |           |           | 109       | 60        | 127       | 93        | 90        |
| Ямбол                      | 66        | 173       | 168       | 92        |           | 226       |           |
| Ярославль                  |           |           |           |           | 65        |           | 87        |
| <b>Общее число городов</b> | <b>40</b> | <b>63</b> | <b>64</b> | <b>74</b> | <b>77</b> | <b>84</b> | <b>85</b> |

И несколько слов об этой книге как таковой.

Здесь приведены все задачи 30 турниров и указания к решениям.

Как говорилось выше, в году проходит 4 тура, на которых школьникам предлагается восемь комплектов задач, а именно:

- задачи для 8—9 классов и для 10—11 классов;
- задачи тренировочного и основного туров;
- задачи осени и задачи весны.

Этот сборник насчитывает около тысячи задач. Стремясь вместить в одну книгу тысячу задач и при этом сохранить разумный объем, я, как правило, ограничивался указанием на основную

идею решения; детали в большинстве случаев предоставлены трудолюбивым читателям для самостоятельной работы.

Нумерация задач в тексте для каждого Турнира в отдельности сплошная. Ссылки на задачу даются: в пределах одного Турнира — только номер (скажем, «смотрите задачу 27»), при ссылках на задачу другого Турнира — номер Турнира и задачи (скажем, «смотрите задачу XVII.24»).

Полные решения на протяжении ряда лет публиковались в методических рассылках Турнира вместе с результатами и списком победителей. Значительная часть этих решений опубликована также на сайте [www.mcsme.ru](http://www.mcsme.ru). Сверх того, в Австралии были изданы сборники турниров (I—V, VI—X и XI—XIV Турниры) с подробными решениями. И наконец, некоторые задачи Турниров параллельно предлагались на Московских математических олимпиадах, и сборник задач ММО за 1993—2005 гг. также содержит такие задачи с подробными решениями. Поэтому самому мне пришлось решить или припомнить решения лишь части задач; в остальных же случаях я только существенно перерабатывал (как правило — в сторону сокращения) предложенные решения.

Я приношу глубочайшую благодарность тем, кто составил задачи, тем, кто составил их решения, более или менее сокращенный вариант которых приводится в этой книге. Особо хочу поблагодарить Сергея Дориченко, оказавшего большую помощь в поисках материалов для книги и, что особенно ценно, сделавшего это оперативно — *bis dat qui cito dat* (вдвойне дает тот, кто дает быстро).

Конкретные ссылки даются в тексте только в случае необходимости, с указанием на австралийские сборники<sup>3</sup> или на ММО («Московские математические олимпиады»; в последнем случае с указанием класса и номера задачи).

---

<sup>3</sup>Tournament of the towns. 1980—1984 / Ed. by P. J. Taylor. Australian Math. Trust, 1993; Tournament of the towns. 1985—1989 / Ed. by P. J. Taylor. Australian International Center for Math. Enrichment, 1992; Tournament of the towns. 1989—1993 / Ed. by P. J. Taylor. Australian Math. Trust, 1994.

# **I Турнир городов**

## **(Олимпиада трех городов, 1980)**

1. На окружности имеются синие и красные точки. Разрешается добавить или убрать красную точку и поменять цвета ее соседей. Менее двух точек оставлять не разрешается. Пусть первоначально было всего две красные точки. Докажите, что за несколько разрешенных операций нельзя получить картину, состоящую из двух синих точек.

*К. Казарновский*

2. В таблице  $N \times N$ , заполненной числами, все строки различны (две строки называются различными, если они отличаются хотя бы в одном элементе). Докажите, что из таблицы можно так вычеркнуть некоторый столбец, что в оставшейся таблице опять все строки будут различны.

*А. Анджанс*

3. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_{101}$  — такая перестановка чисел  $2, 3, \dots, 102$ , что  $a_k$  делится на  $k$  при каждом  $k$ . Найдите все такие перестановки.

*Фольклор*

4. В пространстве имеется 30 ненулевых векторов. Докажите, что среди них найдутся два, угол между которыми меньше  $45^\circ$ .

*А. Толпыго*

5. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$  (площади  $S$ ). Каждая его сторона разбита на  $K$  равных частей. Точки деления, принадлежащие стороне  $AB$ , так соединены прямыми с точками деления, принадлежащими стороне  $CD$ , что первая, считая от  $A$ , точка деления соединена с первой точкой деления, считая от  $D$ , вторая — со второй, и т. д. (первая серия прямых), а точки деления, принадлежащие стороне  $BC$ , аналогичным образом соединены с точками деления, принадлежащими стороне  $DA$  (вторая серия прямых). Образовалось  $K^2$  маленьких четырехугольников, которые образуют, условно говоря,  $K$  «строк» и  $K$  «столбцов». Из них выбрано  $K$  четырехугольников так, чтобы в каждой «строке» и в каждом «столбце» было выбрано по одному. Докажите, что сумма площадей выбранных четырехугольников равна  $S/K$ .

*А. Анджанс*

**6.** В квадрате со стороной 1 проведено конечное количество отрезков, параллельных его сторонам. Отрезки могут пересекать друг друга. Сумма длин проведенных отрезков равна 18. Докажите, что среди частей, на которые разбивается квадрат этими отрезками, найдется такая, площадь которой не меньше 0,01.

*А.Берзиньш, А.Анджанс*

## II Турнир городов (1981)

### 7—8 классы

1. Найдите все целые решения уравнения  $y^k = x^2 + x$  ( $k$  — натуральное число, большее 1).

*Фольклор*

2. Пусть  $M$  — множество точек на плоскости. Точка  $O$  называется «почти центром симметрии» множества  $M$ , если из  $M$  можно так выбросить одну точку, что для оставшегося множества  $O$  является центром симметрии в обычном смысле. Сколько «почти центров симметрии» может иметь конечное множество на плоскости? Укажите все такие числа.

*В. Прасолов*

3. В окружность с центром  $O$  вписан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ , диагонали которого взаимно перпендикулярны. Докажите, что ломаная  $AOC$  делит четырехугольник на две части равной площади.

*В. Варваркин*

4. См. задачу 9 а).

5. См. задачу 7 при  $K = 50$ .

### 9—10 классы

6. Будем говорить, что две пирамиды соприкасаются гранями, если эти пирамиды не имеют общих внутренних точек и некоторая грань одной пирамиды пересекается с некоторой гранью другой пирамиды по многоугольнику. Можно ли расположить 8 пирамид в пространстве так, чтобы каждые две соприкасались гранями?

*А. Анджанс*

7. На бесконечной плоскости играют двое: один передвигает одну фишку-волка, другой — одну из  $K$  фишек-овец. После хода волка ходит какая-нибудь из овец, затем, после следующего хода волка, опять какая-нибудь из овец и т. д. И волк, и овцы передвигаются за один ход в любую сторону не более чем на один метр. Верно ли, что для любого числа овец, участвующих в игре, существует такая первоначальная позиция, что волк не поймаёт ни одной овцы?

*Фольклор*

8. Докажите, что любое действительное положительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичная запись каждого из которых состоит из цифр 0 и 7.

*Э. Туркевич*

9. Однажды  $K$  друзей одновременно узнали  $K$  новостей, причем каждый узнал одну новость. Они стали звонить друг другу и обмениваться новостями. Каждый разговор длится 1 час. За один разговор можно передать сколько угодно новостей. Какое минимальное количество часов необходимо, чтобы все узнали все новости? Рассмотрите в этой задаче три случая:

а)  $K = 64$ , б)  $K = 55$ , в)  $K = 100$ .

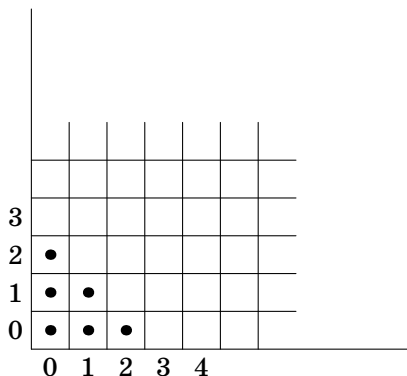
*А. Анджанс*

10. На бесконечной клетчатой бумаге отмечено шесть клеток (см. рисунок). На некоторых клетках стоят фишки. Положение фишек разрешается преобразовывать по следующему правилу: если обе соседние сверху и справа от данной фишки клетки свободны, то в эти клетки ставится по фишке, а старая фишка убирается. Ставится цель за некоторое количество таких операций освободить все шесть отмеченных клеток. Можно ли достигнуть этой цели, если

а) в исходной позиции имеются всего 6 фишек и они стоят на отмеченных клетках;

б) в исходной позиции имеется всего одна фишка и она стоит в левой нижней отмеченной клетке.

*М. Концевич*



### III Турнир городов (1982)

#### 7—8 классы

1. Найдите все натуральные числа, делящиеся на 30 и имеющие ровно 30 различных делителей.

*М. Левин*

2. В четырехугольнике длины всех сторон и диагоналей меньше 1 м. Докажите, что его можно поместить в круг радиуса 0,9 м.

*Фольклор*

3. См. задачу 8 а).

4. В стране больше 101 города. Столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединен авиалиниями ровно с десятью городами (если  $X$  соединен с  $Y$ , то  $Y$  соединен с  $X$ ). Известно, что из любого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками). Докажите, что можно так закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, что возможность попасть из любого города в любой сохранится.

*Фольклор*

5. Рассматривается последовательность

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$$

Существует ли арифметическая прогрессия

а) длины 5;

б) сколь угодно большой длины, составленная из членов этой последовательности?

*Г. Гальперин*

Сравните с задачей XVI.12.

#### 9—10 классы

6. а) Докажите, что для любых положительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_k$  ( $k > 3$ ) выполняется неравенство:

$$\frac{x_1}{x_k + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \dots + \frac{x_k}{x_{k-1} + x_1} \geq 2.$$

б) Докажите, что это неравенство ни для какого  $k > 3$  нельзя усилить, т. е. доказать, что для каждого фиксированного  $k$  нельзя заменить двойку в правой части на большее число так, чтобы



полученное неравенство было справедливо для любого набора из  $k$  положительных чисел.

*А. Прокопьев*

7. Квадрат разбит на  $K^2$  равных квадратинов. Про некоторую ломаную известно, что она проходит через центры всех квадратинов (ломаная может пересекать сама себя). Каково минимальное число звеньев у этой ломаной?

*А. Анджанс*

8. Докажите, что в бесконечной последовательности попарно различных натуральных чисел, больших единицы, найдется

а) сто чисел,

б) бесконечное количество чисел,

которые больше своего номера в этой последовательности.

*А. Анджанс*

Задача а) давалась в 7—8 классах, задача б) в 9—10 классах.

9. Многочлен  $P(x)$  со старшим коэффициентом, равным 1, обладает тем свойством, что среди значений, принимаемых им при натуральных значениях аргумента, встречаются все числа вида  $2^m$  с натуральным  $m$ . Докажите, что это многочлен первой степени.

*Фольклор*

10. См. задачу 5.

## IV Турнир городов (1982/83)

Осень, 1982 год

### 7—8 классы

1. В колоде 36 карт, разложенных в таком порядке, что масти периодически чередуются в последовательности: пики, трефы, червы, бубны, пики, трефы, червы, бубны и т. д. С колоды сняли часть, перевернули ее как целое и «врезали» в оставшуюся (т. е. вставили ее между каким-то двумя соседними картами). После этого карты снимают по четыре. Докажите, что в каждой четверке все масти разные.

*А. Мерков*

2. Несколько фишек двух цветов расположены в ряд (встречаются оба цвета). Известно, что фишки, между которыми 10 или 15 фишек, одинаковы. Каково наибольшее число фишек?

*Фольклор*

Сравните с задачами XVI.13, XVI.20.

3. Докажите, что уравнение  $m! \cdot n! = k!$ , где  $m$ ,  $n$  и  $k$  — натуральные числа, большие единицы, имеет бесконечно много решений.

*Фольклор*

4. а) Десять точек, делящие окружность на 10 равных дуг, попарно соединены пятью хордами. Обязательно ли среди них найдутся две хорды одинаковой длины?

б) Двадцать точек, делящие окружность на 20 равных дуг, попарно соединены 10 хордами. Докажите, что среди них обязательно найдутся две хорды одинаковой длины.

*В. Произволов*

### 9—10 классы

5. Докажите для каждого натурального числа  $n > 1$  равенство:

$$[n^{1/2}] + [n^{1/3}] + \dots + [n^{1/n}] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \dots + [\log_n n].$$

*В. Кисиль*

6. Существует ли многогранник (не обязательно выпуклый), полный список ребер которого имеет вид:  $AB, AC, BC, BD, CD, DE, EF, EG, FG, FH, GH, AH$ ?

*Фольклор*

7. На полосе бумаги написаны подряд 60 знаков: «х» и «о». Эту полосу разрезают на куски с симметричным расположением знаков. Например: о, х х, о х х х о, х о х, ...

а) Докажите, что существует такой способ разрезания, при котором кусков не больше 24.

б) Приведите пример такого расположения знаков, при котором меньше 15 кусков получить нельзя.

в) Постарайтесь улучшить оценку.

*Фольклор*

8. а) Из произвольной точки  $M$  внутри правильного  $n$ -угольника проведены перпендикуляры  $MK_1, MK_2, \dots, MK_n$  к его сторонам (или их продолжениям). Докажите, что сумма векторов  $\vec{S} = \vec{MK}_1 + \vec{MK}_2 + \dots + \vec{MK}_n$  равна  $\vec{MO} \cdot n/2$  ( $O$  — центр  $n$ -угольника).

б) Докажите, что сумма векторов  $\vec{S}$ , проведенных из любой точки  $M$  внутри правильного тетраэдра перпендикулярно к его граням, равна  $\frac{4}{3} \cdot \vec{MO}$ , где  $O$  — центр тетраэдра.

*В. Прасолов*

Сравните с задачей 23.

9. Марсианское метро на плане имеет вид замкнутой самопересекающейся линии, причем в одной точке может происходить только одно самопересечение. Докажите, что туннель с таким планом можно прорыть так, что поезд будет проходить попеременно под и над пересекающейся линией.

*Фольклор*

## Весна, 1983 год

### 7—8 классы

10. Пешеход шел 3,5 часа, причем за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость за все время равна 5 км/ч?

*Н. Константинов*

11. Правильный  $4k$ -угольник разрезан на параллелограммы.

а) Докажите, что среди них не менее  $k$  прямоугольников.

б) Найдите их общую площадь, если длина стороны  $4k$ -угольника равна  $a$ .

*В. Произволов*

12. В Швамбрании  $N$  городов, каждые два соединены дорогой. При этом дороги сходятся лишь в городах (нет перекрестков, одна дорога поднята эстакадой над другой). Злой волшебник устанавливает на всех дорогах одностороннее движение таким образом, что если из города можно выехать, то в него нельзя вернуться. Докажите, что

- а) волшебник может осуществить свое намерение;
- б) найдется город, из которого можно добраться до всех, и найдется город, из которого нельзя выехать;
- в) существует, и притом единственный, путь, обходящий все города;
- г) волшебник может это сделать  $N!$  способами.

*Л. Коганов*

В 7—8 классах предлагались пункты а), б), в); в 9—10 классах — пункты а), б), г).

13. См. задачу 20 а).

14. Докажите, что из 17 различных натуральных чисел либо найдутся пять таких чисел  $a, b, c, d, e$ , что каждое из чисел этой пятерки, кроме последнего, делится на число, стоящее за ним, либо найдутся пять таких чисел, что ни одно из них не делится на другое.

*Известная теорема*

15. Натуральные числа  $M$  и  $K$  отличаются перестановкой цифр. Докажите, что

- а) сумма цифр  $2M$  равна сумме цифр  $2K$ ;
- б) сумма цифр  $M/2$  равна сумме цифр  $K/2$  (если  $M$  и  $K$  четны);
- в) сумма цифр  $5M$  равна сумме цифр  $5K$ .

*А. Лисицкий*

16. Бильярд имеет форму прямоугольного треугольника, один из острых углов которого равен  $30^\circ$ . Из этого угла по медиане к противоположной стороне выпущен шар (материальная точка). Докажите, что после восьми отражений (угол падения равен углу отражения) он попадет в лузу, находящуюся в вершине угла  $60^\circ$ .

*Фольклор*

**9—10 классы**

17. Числа от 1 до 1000 расставлены по окружности. Докажите, что их можно соединить 500 непересекающимися отрезками, разность чисел на концах которых (по модулю) не более 749.

*А.Разборов*

18. На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  треугольника  $ABC$  так взяты точки  $M$ ,  $K$  и  $P$ , что  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{BK}$  и  $\overrightarrow{CP}$  пересекаются в одной точке и сумма векторов  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{BK}$  и  $\overrightarrow{CP}$  равна  $\vec{0}$ . Докажите, что  $K$ ,  $M$  и  $P$  — середины сторон треугольника.

*Фольклор*

19. См. задачу 12.

20. На бесконечном листе клетчатой бумаги двое играют в такую игру: первый окрашивает произвольную клетку в красный цвет; второй окрашивает произвольную незакрашенную клетку в синий цвет; затем первый окрашивает произвольную незакрашенную клетку в красный цвет, а второй еще одну незакрашенную клетку в синий цвет и т. д. Первый стремится к тому, чтобы центры каких-то четырех красных клеток образовали квадрат со сторонами, параллельными линиям сетки, а второй хочет ему помешать.

а) Может ли выиграть первый игрок?

б) Каков будет ответ на этот вопрос, если второй игрок закрашивает синим цветом сразу по две клетки?

*Д.Азов*

Сравните с задачей XVIII.30.

21. В правильном  $n$ -угольнике закрашены  $k$  вершин. Закраска называется почти равномерной при условии, что для любого натурального  $m$  верно следующее: если  $M_1$  — множество  $m$  расположенных подряд вершин и  $M_2$  — другое такое множество, то количество закрашенных вершин в  $M_1$  отличается от количества закрашенных вершин в  $M_2$  не больше, чем на 1. Докажите, что для любых натуральных  $n$  и  $k$  ( $k \leq n$ ) почти равномерная закразка существует и что она единственна с точностью до поворотов закрашенного множества.

*М.Концевич*

Сравните с задачей 30 с XXXII ММО (опубликовано в сборнике: Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986).

**22.** Несколько ребят стоят в круг. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого четное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечетное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Докажите, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.

*А.Анджанс*

Сравните с задачей XIX.36.

**23.** Внутри правильного  $n$ -угольника взята точка, проекции которой на все стороны попадают во внутренние точки сторон. Этими точками стороны разделяются на  $2n$  отрезков. Занумеруем их подряд:  $1, 2, 3, \dots, 2n$ . Докажите, что сумма длин отрезков с четными номерами равна сумме длин отрезков с нечетными номерами.

*А.Анджанс*

Сравните с задачей 8.

## V Турнир городов (1983/84)

Осень, 1983 год

### 7—8 классы

1. Внутри квадрата  $ABCD$  взята точка  $M$ . Докажите, что точки пересечения медиан треугольников  $ABM$ ,  $BCM$ ,  $CDM$  и  $DAM$  образуют квадрат.

*Фольклор*

2. Найдите все такие натуральные  $K$ , которые можно представить в виде суммы двух взаимно простых чисел, отличных от 1.

*Фольклор*

3. Постройте четырехугольник по сторонам и расстоянию между серединами диагоналей.

*И.Титович*

4. Пусть  $a_1, a_2, a_3, \dots$  — монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел. Известно, что  $a_{a_k} = 3k$  для любого  $k$ . Найдите а) значение  $a_{100}$ ; б) значение  $a_{1983}$ .

*А.Анджанс*

Пункт а) давался в 7—8 классах, пункт б) — в 9—10.

5. На шахматной доске  $n \times n$  стоят  $n^2$  шашек. Можно ли их переставить так, чтобы любые две шашки, отстоявшие на ход коня, после перестановки отстояли друг от друга лишь на ход короля (т.е. стояли рядом)? Рассмотрите два случая:

а)  $n = 3$ ; б)  $n = 8$ .

*С.Стефанов*

### 9—10 классы

6. На сторонах  $BC$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  выбраны точки  $M$  и  $K$  так, что периметр треугольника  $CMK$  равен удвоенной стороне квадрата. Найдите величину угла  $MAK$ .

*Фольклор*

7. Рассматриваются девятизначные числа, состоящие из неповторяющихся цифр от 1 до 9 в разном порядке. Пара таких чисел называется правильной, если их сумма равна 987 654 321.

а) Докажите, что найдутся хотя бы две правильные пары (считаем, что  $(a, b)$  и  $(b, a)$  — одна и та же пара).

б) Докажите, что правильных пар — нечетное число.

*Г.Гальперин*

8. Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность. Ее центр  $O$  находится внутри треугольника. Из точки  $O$  опущены перпендикуляры на стороны  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  и продолжены до окружности, с которой они пересекаются в точках  $K$ ,  $M$  и  $P$  соответственно. Пусть  $\vec{OK} + \vec{OM} + \vec{OP} = \vec{OZ}$ . Докажите, что  $Z$  — центр вписанной окружности.

*В. Гальперин*

9. См. задачу 4.

10. На бесконечной во все стороны шахматной доске выделено некоторое множество клеток  $A$ . На всех клетках доски, кроме множества  $A$ , стоят короли. Все короли могут по команде одновременно сделать ход, заключающийся в том, что король либо остается на месте, либо занимает соседнее поле, т. е. делает «ход короля». При этом он может занять и то поле, с которого сходит другой король, но двум королям запрещается оказаться в результате хода на одной клетке. Существует ли такое  $K$  и такой способ движения королей, что после  $K$  ходов вся доска будет заполнена королями? Рассмотрите следующие варианты.

а) Множество  $A$  — это множество всех клеток, у которых обе координаты кратны 100 (предполагается, что одна горизонтальная и одна вертикальная линии занумерованы всеми целыми числами от минус бесконечности до бесконечности и каждая клетка доски обозначается двумя числами — координатами по этим двум осям).

б) Множество  $A$  — это множество всех клеток, каждая из которых бьется хотя бы одним из 100 ферзей, расположенных каким-то фиксированным образом.

*Фольклор*

Сравните с задачей IX.22.

## Весна, 1984 год

### Базовый вариант

7—8 классы

11. См. задачу 16 а).

12. В выпуклом пятиугольнике  $ABCDE$   $AE = AD$ ,  $AB = AC$ ,  $\angle CAD = \angle AEB + \angle ABE$ . Докажите, что отрезок  $CD$  вдвое длиннее медианы  $AM$  треугольника  $ABE$ .

*Фольклор*



13. Рассматриваются  $4(n-1)$  граничных клеток таблицы размером  $n \times n$ . Нужно вписать в эти клетки  $4(n-1)$  последовательных целых чисел (не обязательно положительных) так, чтобы сумма чисел в вершинах любого прямоугольника со сторонами, параллельными диагоналям таблицы, в том числе и в «вырожденных» прямоугольниках — диагоналях, равнялась одному и тому же числу (для прямоугольников суммируются 4 числа, для диагоналей — 2 числа). Возможно ли это? Рассмотрите случаи:

а)  $n = 3$ ; б)  $n = 4$ ; в)  $n = 5$ .

*В. Болтянский*

14. Через  $P(x)$  обозначается произведение всех цифр натурального числа  $x$ , через  $S(x)$  — сумма цифр числа  $x$ . Сколько решений имеет уравнение:

$$P(P(x)) + P(S(x)) + S(P(x)) + S(S(x)) = 1984?$$

*Фольклор*

15. Дана бесконечная клетчатая бумага со стороной клетки, равной единице. Расстоянием между двумя клетками называется длина кратчайшего пути ладьи от одной клетки до другой (считается путь центра ладьи). В какое наименьшее число красок нужно раскрасить доску (каждая клетка закрашивается одной краской), чтобы две клетки, находящиеся на расстоянии 6, были всегда окрашены разными красками?

*А. Печковский, И. Итенберг*

## 9—10 классы

16. 175 шалтаев стоят дороже, чем 125 болтаев, но дешевле, чем 126 болтаев. Докажите, что на покупку трех шалтаев и одного болта не хватит:

а) 80 коп.; б) 1 руб.

*С. Фомин*

17. Из вершин основания тетраэдра в боковых гранях проводят высоты, и в каждой из боковых граней основания двух лежащих в ней высот соединяются прямой. Докажите, что эти три прямые параллельны одной плоскости.

*И. Шарыгин*

18. Из листа клетчатой бумаги размером  $29 \times 29$  клеточек вырезали 99 квадратов  $2 \times 2$  (режут по линиям). Докажите,

что из оставшейся части листа можно вырезать еще хотя бы один такой же квадратик.

*С.Фомин*

**19.** Пусть  $F(x)$  — возрастающая функция, определенная на отрезке  $[0; 1]$ . Известно, что множество ее значений — это отрезок  $[0; 1]$ . Докажите, что, каково бы ни было натуральное  $N$ , график функции можно покрыть  $N$  прямоугольниками, при этом стороны которых параллельны осям координат, что площадь каждого равна  $1/N^2$ . Считайте функцию  $F(x)$  непрерывной.

*А.Анджанс*

**20. а)** Во всех клетках квадрата  $20 \times 20$  стоят солдатики. Ваня называет число  $D$ , а Петя переставляет солдатиков так, чтобы каждый передвинулся на расстояние, не меньше  $D$  (расстояние берется между центрами старой и новой клеток). При каких  $D$  это возможно? (Укажите наибольшее возможное  $D$ , докажите, что всех солдатиков можно передвинуть не меньше, чем на  $D$ , и докажите, что большее  $D$  взять нельзя.)

**б)** Эта же задача для квадрата  $21 \times 21$ .

*С.Кротов*

### Сложный вариант

#### 7—8 классы

**21.** См. задачу 15.

**22.** На уроке танцев 15 мальчиков и 15 девочек так построились двумя параллельными колоннами, что образовалось 15 пар. В каждой паре измерили разницу роста мальчика и девочки (разница берется по абсолютной величине, т. е. из большего вычитают меньшее). Максимальная разность оказалась 10 см. В другой раз перед образованием пар каждую колонну предварительно построили по росту. Докажите, что максимальная разность будет не больше 10 см.

*А.Печковский*

**23.** См. задачу 13.

**24.** Разрежьте равнобедренный прямоугольный треугольник на несколько подобных ему треугольников так, чтобы любые два из них были различны по размерам.

*А.Савкин*

**25.** Докажите, что существует бесконечное число пар таких соседних натуральных чисел, что разложение каждого из них

содержит любой простой сомножитель не менее чем во второй степени. Примеры таких пар чисел: (8, 9), (288, 289).

*А.Анджанс*

### 9—10 классы

26. См. задачу 20.

27. См. задачу 17.

28. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 9 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних  $K$ -й и  $(K+1)$ -й комнатах, приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в  $(K-1)$ -ю и  $(K+2)$ -ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся (пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают).

*В.Ильичев*

Сравните с задачей XIII.36.

29. См. задачу 19.

30. Для каждого натурального  $N$  обозначим через  $P(N)$  число разбиений  $N$  в сумму натуральных слагаемых (разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми; например,  $P(4) = 5$ , потому что

$$4 = 4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

т.е. пять способов). Количество различных чисел в данном разбиении назовем его разбросом (например, разбиение  $4 = 1 + 1 + 2$  имеет разброс 2, потому что в этом разбиении два различных числа).

а) Докажите, что сумма разбросов всех разбиений числа  $N$  равна  $1 + P(1) + P(2) + \dots + P(N-1)$ .

б) Докажите, что это число не больше, чем  $\sqrt{2N} \cdot P(N)$ .

*А.Зелевинский*

## VI Турнир городов (1984/85)

Осень, 1984 год

Базовый вариант

### 7—8 классы

1. Биссектрисы  $BD$  и  $CE$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что если  $OD = OE$ , то либо треугольник равнобедренный, либо его угол при вершине  $A$  равен  $60^\circ$ .

*Фольклор*

2. Поселок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы — квадраты со стороной  $b$ , всего 9 кварталов). Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и заканчивает свой путь в угловой точке  $A$ ? (Стороны квадрата — тоже улицы.)

*Московский фольклор*

3. Решите в целых числах уравнение  $2^n + 7 = x^2$ .

*Фольклор*

4. В прямоугольник вписан четырехугольник (по вершине на каждой стороне). Докажите, что его периметр не меньше удвоенной диагонали прямоугольника.

*В.Произволов*

5. Докажите, что среди 18 последовательных трехзначных чисел найдется хотя бы одно, которое делится на сумму своих цифр.

*Фольклор*

### 9—10 классы

6. В выпуклом шестиугольнике  $ABCDEF$   $AB$  параллельна  $CF$ ,  $CD$  параллельна  $BE$  и  $EF$  параллельна  $AD$ . Докажите, что площади треугольников  $ACE$  и  $BDF$  равны.

*Фольклор*

7. См. задачу 2.

8. Дан треугольник  $ABC$ . Известно, что  $\angle B = \angle C = 40^\circ$ ,  $BD$  — биссектриса. Докажите, что  $BD + DA = BC$ .

*Фольклор*

9. См. задачу 5.

10. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

*В. Ильичёв*

### Сложный вариант

#### 7—8 классы

11. См. задачу 1.

12. См. задачу 2.

13. На плоскости лежит конечное множество точек  $M$ , такое что никакие три точки не лежат на одной прямой. Некоторые точки так соединены друг с другом отрезками, что из каждой точки выходит не более одного отрезка. Разрешается заменить пару пересекающихся отрезков  $AB$  и  $CD$  парой противоположных сторон  $AC$  и  $BD$  четырехугольника  $ABCD$ . В полученной системе отрезков разрешается снова произвести подобную замену, и т.д.

Может ли последовательность таких замен быть бесконечной?

*В. Колосов*

14. На фестивале камерной музыки собралось шесть музыкантов. На каждом концерте часть музыкантов выступает, а остальные слушают их из зала. За какое наименьшее число концертов каждый из шести музыкантов сможет послушать (из зала) всех остальных?

*Канадский фольклор*

Сравните с задачей VII.21.

15. См. задачу 10.

#### 9—10 классы

16. См. задачу 6.

17. Набор чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  получен некоторой перестановкой чисел  $1, 2, \dots, 100$ . Образуют сто новых чисел:

$$B_1 = a_1,$$

$$B_2 = a_1 + a_2,$$

$$B_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

.....

$$B_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}.$$

Докажите, что среди остатков от деления на 100 чисел  $B_1, B_2, \dots, B_{100}$  найдутся 11 различных.

*Л. Курляндчик*

18. В правильном десятиугольнике проведены все диагонали. Возле каждой вершины и возле каждой точки пересечения диагоналей поставлено число  $+1$  (рассматриваются только сами диагонали, а не их продолжения). Разрешается одновременно изменить все знаки у чисел, стоящих на одной стороне или на одной диагонали. Можно ли с помощью нескольких таких операций изменить все знаки на противоположные?

*Фольклор*

19. См. задачу 14.

20. В квадрате  $7 \times 7$  клеток размещено 16 плиток размером  $1 \times 3$  клетки и одна плитка  $1 \times 1$ . Докажите, что плитка  $1 \times 1$  либо лежит в центре, либо примыкает к границам квадрата.

*Фольклор*

Сравните с задачей XII.11.

## Весна, 1985 год

### Базовый вариант

#### 7—8 классы

21. Медиана, биссектриса и высота треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ . Отрезок биссектрисы от вершины до точки  $O$  равен отрезку высоты от вершины до точки  $O$ . Докажите, что треугольник равносторонний.

*Фольклор*

22. Имеется 68 монет, причем известно, что любые две монеты различаются по весу. За 100 взвешиваний на двухчашечных весах без гирь найдите самую тяжелую и самую легкую монеты.

*По мотивам А.Ахо, J. Hopcroft, J. Ullman*

23. Найдите все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} (x+y)^3 = z; \\ (y+z)^3 = x; \\ (z+x)^3 = y. \end{cases}$$

24. На прямой сидят три кузнечика, каждую секунду прыгает один кузнечик. Он прыгает через какого-нибудь кузнечика (но не через двух сразу). Докажите, что через 1985 секунд они не могут вернуться в исходное положение.

*Ленинградская математическая олимпиада, 1985*

25. Каждый член последовательности, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему числу его суммы цифр. Первым членом последовательности является единица. Может ли в последовательности встретиться число 123 456?

*Д. Фомин*

#### 9—10 классы

26. В четырехугольнике  $ABCD$

$$AB = BC = 1, \quad \angle B = 100^\circ, \quad \angle D = 130^\circ.$$

Найдите длину отрезка  $BD$ .

*Фольклор*

27. Из чисел  $1, 2, 3, \dots, 1985$  выберите наибольшее количество чисел так, чтобы разность любых двух выбранных чисел не была простым числом. (Единица простым числом не является.)

*Фольклор*

28. Даны три действительных числа:  $a, b$  и  $c$ . Известно, что

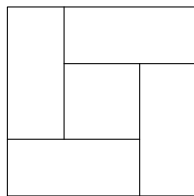
$$a + b + c > 0, \quad ab + bc + ca > 0, \quad abc > 0.$$

Докажите, что  $a > 0, b > 0$  и  $c > 0$ .

*Фольклор*

29. См. задачу 24.

**30.** Квадрат разбит на пять прямоугольников. Известно, что площади четырех прямоугольников, прилегающих к сторонам квадрата, равны между собой. Докажите, что пятый прямоугольник является квадратом.



*В.Произволов*

### Сложный вариант

#### 7—8 классы

**31.** Пусть  $a, b, c$  — длины сторон треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $c \geq (a + b) \cdot \sin(\angle C/2)$ .

*Фольклор*

**32. а)** Приведите пример такого положительного числа  $A$ , что  $\{A\} + \{1/A\} = 1$ . ( $\{A\}$  — дробная часть  $A$ .)

**б)** Может ли такое  $A$  быть рациональным числом?

*И.Варге*

**33.** В классе 32 ученика. Было организовано 33 кружка, причем каждый кружок состоит из трех человек и никакие два кружка не совпадают по составу. Докажите, что найдутся такие два кружка, которые пересекаются ровно по одному ученику.

*Фольклор*

**34.** См. задачу 30.

**35.** В таблицу  $10 \times 10$  нужно записать в каком-то порядке цифры  $0, 1, 2, 3, \dots, 9$  так, что каждая цифра встречалась бы 10 раз.

**а)** Можно ли это сделать так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце встречалось не более четырех различных цифр?

**б)** Докажите, что найдется строка или столбец, в которой (в котором) встречается не меньше четырех различных чисел.

*Л.Курляндчик*

#### 9—10 классы

**36.** Докажите, что площадь проекции единичного куба на плоскость равна длине его проекции на прямую, перпендикулярную к этой плоскости.

*Фольклор*

**37.** Радиус  $OM$  круга равномерно вращается, поворачиваясь в секунду на угол  $360^\circ/N$  ( $N$  — натуральное число, большее 3).



В начальный момент он занимал положение  $OM_0$ , через секунду —  $OM_1$ , еще через две секунды после этого (т.е. через три секунды после начала) —  $OM_2$ , еще через три секунды после этого —  $OM_3$ , и т.д., еще через  $N - 1$  секунду после  $OM_{N-2} - OM_{N-1}$ . При каких  $N$  эти положения радиуса делят круг на  $N$  равных секторов?

а) Верно ли, что к числу таких  $N$  относятся все степени двойки?

б) Относятся ли к числу таких  $N$  какие-либо числа, не являющиеся степенями двойки?

*В.Произволов*

38. См. задачу 33.

39. Выпуклой фигурой  $F$  нельзя накрыть полукруг радиуса  $R$ . Может ли случиться, что двумя фигурами, равными  $F$ , можно накрыть круг радиуса  $R$ ? А если взять невыпуклую фигуру  $F$ ?

*Н.Васильев, А.Самосват*

40. а) Квадрат разбит на прямоугольники. «Цепочкой» называется такое подмножество  $K$  множества этих прямоугольников, что существует сторона квадрата  $b$ , целиком закрытая проекциями прямоугольников из  $K$ , но при этом ни в какую точку этой стороны не проектируются внутренние точки двух прямоугольников из  $K$  (мы относим к прямоугольнику и его стороны). Докажите, что любые два прямоугольника разбиения входят в некоторую цепочку.

б) Аналогичная задача для куба, разбитого на прямоугольные параллелепипеды (в определении цепочки нужно заменить сторону на ребро).

*А.Гольберг, В.Гуревич*

## VII Турнир городов (1985/86)

Осень, 1985 год

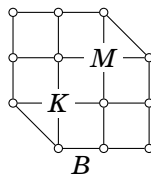
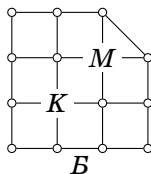
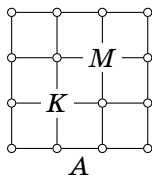
7—8 классы

1. Восемь футбольных команд провели турнир в один круг, причем ничьих не было. Докажите, что можно выделить такие четыре команды  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , что  $A$  выиграла у  $B$ ,  $C$  и  $D$ ;  $B$  выиграла у  $C$  и  $D$ ;  $C$  выиграла у  $D$ .

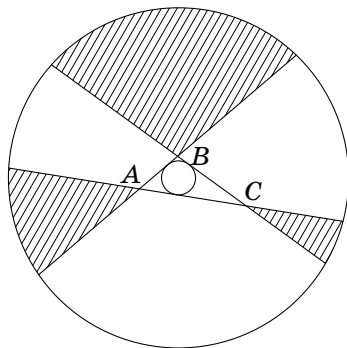
*Фольклор*

2. Игра «кошки-мышки». Кошка ловит мышку в лабиринтах  $A$ ,  $B$ ,  $B$ . Кошка ходит первой, начиная с узла, отмеченного буквой « $K$ ». Затем ходит мышка (из узла « $M$ »), затем опять кошка, и т. д. Из любого узла кошка и мышка ходят в любой соседний узел. Если в какой-то момент кошка и мышка оказываются в одном узле, кошка ест мышку. Сможет ли кошка поймать мышку в любом из случаев  $A$ ,  $B$ ,  $B$ ?

*А. Сосинский*



3. Учитель продиктовал классу задание, которое каждый ученик выполнил в своей тетради. Вот это задание: «Нарисуйте две концентрические окружности радиусов 1 и 10. К малой окруж-



ности проведите три касательных так, чтобы точки их пересечения  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежали внутри большой окружности. Измерьте площадь  $S$  треугольника  $ABC$  и площади  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  трех образовавшихся «секторов» с вершинами в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Найдите  $S_1 + S_2 + S_3 - S$ . Докажите, что у всех учеников (если они правильно выполнили задание) получились одинаковые результаты.

*А.Толпыго*

4. Два шахматиста играют между собой в шахматы с часами (сделав ход, шахматист останавливает свои часы и пускает часы другого). Известно, что после того как оба сделали по 40 ходов, часы обоих шахматистов показывали одно и то же время: 2 ч 30 мин. Докажите, что в ходе партии был момент, когда часы одного обгоняли часы другого не менее чем на 1 мин 51 с. Можно ли утверждать, что в некоторый момент разница показаний часов была равна 2 мин?

*С.Фомин*

5. Двое бросают монету: один бросил ее 10 раз, другой — 11 раз. Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом больше раз, чем у первого?

*С.Фомин*

6. Последовательность чисел  $x_1, x_2, \dots$  такова, что  $x_1 = 1/2$  и для всякого натурального  $k$  выполнено равенство  $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$ . Найдите целую часть суммы

$$\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \dots + \frac{1}{x_{100} + 1}.$$

*А.Анджанс*

7. Игра в «супершахматы» ведется на доске размером  $30 \times 30$ , и в ней участвуют 20 разных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, однако, что

- 1) любая фигура с любого поля бьет не более 20 полей;
- 2) если фигуру сдвинуть на несколько полей, то битые поля соответственно сдвигаются (может быть, исчезают за пределы доски).

Докажите, что

- а) любая фигура  $F$  бьет данное поле  $X$  не более чем с 20 полей;
- б) можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.

*А.Толпыго*

Сравните с задачей 14.

## 9—10 классы

8. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$  и точка  $M$  внутри него. Докажите, что сумма расстояний от точки  $M$  до вершин четырехугольника не превосходит  $P + d_1 + d_2$ , где  $P$  — периметр,  $d_1$  и  $d_2$  — длины диагоналей четырехугольника.

Фольклор

9. См. задачу 4.

10. См. задачу 5.

11. См. задачу 6.

12. а) Внутри выпуклого  $N$ -угольника  $A_1A_2A_3 \dots A_N$  лежит точка  $O$ . Рассматриваются углы  $A_iOA_j$  при всевозможных парах  $(i, j)$  ( $i, j$  — различные натуральные числа от 1 до  $N$ ). Докажите, что среди этих углов найдется по крайней мере  $N - 1$  не острых (прямых, тупых или развернутых) углов.

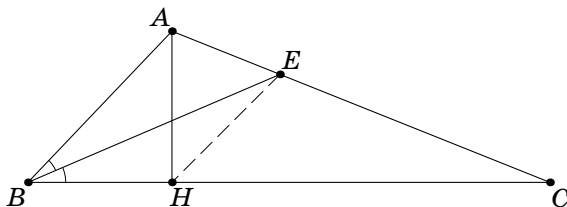
б) Та же задача для выпуклого многогранника, имеющего  $N$  вершин.

В. Болтянский

13. В треугольнике  $ABC$  проведены высота  $AH$  и биссектриса  $BE$ . Известно, что  $\angle BEA = 45^\circ$ . Докажите, что  $\angle EHC = 45^\circ$ .

И. Шарыгин

Сравните с задачей XVIII.39.



14. На доске размером  $100 \times 100$  ведется игра в «гипершахматы», и в ней участвуют 20 разных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого места бьет не более 20 полей. (Но больше о правилах ничего не сказано. Например, если фигуру передвинуть, то о том, как изменится множество битых полей, мы ничего не знаем.) Докажите, что можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.

А. Толпыго

Сравните с задачей 7.

**Весна, 1986 год****7—8 классы**

15. Через вершины  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  проведены две прямые, которые разбивают треугольник на четыре фигуры (три треугольника и один четырехугольник). Известно, что три из этих фигур имеют одинаковые площади. Докажите, что четырехугольник — среди них.

*Г. Гальперин, А. Савин*

16. Натуральное число  $n$  записано в десятичной системе счисления. Известно, что если какая-то цифра входит в эту запись, то  $n$  делится нацело на эту цифру (0 в записи не встречается). Какое максимальное число различных цифр может содержать эта запись?

*С. Фомин*

17. Улицы города идут в трех направлениях, разбивая его на кварталы — равные между собой равносторонние треугольники. Правила уличного движения таковы, что через перекресток можно проехать либо прямо, либо повернув на  $120^\circ$  влево или вправо в ближайшую улицу. Поворачивать разрешается только на перекрестках. Две машины выехали друг за другом из одной точки в одном направлении и едут с одинаковой скоростью, придерживаясь этих правил. Может ли случиться, что через некоторое время они на какой-то улице (не на перекрестке) встретятся?

*Н. Константинов*

18. Дан квадрат  $ABCD$ . На стороне  $AB$  взята точка  $K$ , на стороне  $CD$  — точка  $L$ , на отрезке  $KL$  — точка  $M$ . Докажите, что вторая (отличная от  $M$ ) точка пересечения окружностей, описанных около треугольников  $AKM$  и  $MLC$ , лежит на диагонали  $AC$ .

*В. Дубровский*

19. Двадцать футбольных команд проводят первенство. В первый день все команды сыграли по одной игре. Во второй также все команды сыграли по одной игре. Докажите, что после второго дня можно указать такие 10 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.

*С. Генкин*

20. (Сизифов труд.) На горе 1001 ступенька, на некоторых лежат камни, по одному на ступеньке. Сизиф берет любой камень

и переносит его на ближайшую сверху свободную ступеньку (т. е. если следующая ступенька свободна, то на нее, а если занята, то на несколько ступенек вверх до первой свободной). После этого Аид скатывает на одну ступеньку вниз один из камней, у которых предыдущая ступенька свободна. Камней 500, и первоначально они лежали на нижних 500 ступеньках. Сизиф и Аид действуют по очереди, начинает Сизиф. Его цель — положить камень на верхнюю ступеньку. Может ли Аид ему помешать?

*С. Елисеев*

**21.** Тридцать учеников одного класса решили побывать друг у друга в гостях. Известно, что ученик за вечер может сделать несколько посещений и что в тот вечер, когда к нему кто-нибудь должен прийти, он сам никуда не уходит. Покажите, что для того чтобы все побывали в гостях у всех:

- а) четырех вечеров недостаточно,
- б) пяти вечеров также недостаточно,
- в) десяти вечеров достаточно,
- г) даже семи вечеров достаточно.

*Фольклор*

Сравните с задачей VI.14, которая фактически есть упрощенный вариант данной (вместо 30 учеников — 6 музыкантов).

### **9—10 классы**

**22.** При каком натуральном  $k$  величина  $k^2/1,001^k$  достигает максимального значения?

*Фольклор*

**23.** См. задачу 19.

**24.** На ребрах произвольного (не обязательно правильного) тетраэдра указали направления. Может ли сумма полученных таким образом шести векторов оказаться равной нулевому вектору?

*Фольклор*

**25.** Функция  $F$  задана на всей вещественной оси, причем для любого  $x$  имеет место равенство:  $F(x+1)F(x) + F(x+1) + 1 = 0$ . Докажите, что функция  $F$  не может быть непрерывной.

*А. Плоткин*

**26.** В параллелограмме  $ABCD$  проведена биссектриса угла  $BAD$ . Пусть  $K$  и  $L$  — точки ее пересечения с прямыми  $BC$  и  $CD$  соответственно. (Известно, что  $ABCD$  — не ромб.) Докажите, что центр

$O$  окружности, проведенной через точки  $C$ ,  $K$  и  $L$ , лежит на окружности, проведенной через точки  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

*И. Шарыгин*

**27.** Дана невозрастающая последовательность чисел

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{2k+1} \geq 0.$$

Докажите неравенство:

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \dots + a_{2k+1}^2 \geq (a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{2k+1})^2.$$

*Л. Курляндчик*

**28.** См. задачу 21.

## VIII Турнир городов (1986/87)

Осень, 1986 год

### 7—8 классы

1. Даны два двузначных числа —  $X$  и  $Y$ . Известно, что  $X$  вдвое больше  $Y$ , одна цифра числа  $Y$  равна сумме, а другая — разности цифр числа  $X$ . Найдите эти числа (и докажите, что других нет).

*Фольклор*

2. Квадрат  $ABCD$  и окружность  $O$  так пересекаются по восьми точкам, что образуется четыре криволинейных треугольника:  $AEF$ ,  $BGH$ ,  $CIJ$ ,  $DKL$  ( $EF$ ,  $GH$ ,  $IJ$ ,  $KL$  — дуги окружности). Докажите, что:

а) сумма длин дуг  $EF$  и  $IJ$  равна сумме длин дуг  $GH$  и  $KL$ ;

б) сумма периметров криволинейных треугольников  $AEF$  и  $CIJ$  равна сумме периметров криволинейных треугольников  $BGH$  и  $DKL$ .

*В.Произолов*

3. Двое играют в такую игру. Дана шоколадка с продольными и поперечными углублениями, по которым ее можно ломать. Первый разламывает шоколадку по одной из линий, второй разламывает одну из частей, первый разламывает одну из трех образовавшихся частей и т. д. Игра заканчивается в тот момент, когда в результате очередного хода возникнет долька, на которой уже нет углублений; сделавший этот ход выигрывает. На шоколадке 60 долек: имеется 5 продольных и 9 поперечных углублений. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

*С.Фомин*

4. Берутся всевозможные непустые подмножества из множества чисел  $1, 2, 3, \dots, N$ . Для каждого подмножества берется величина, обратная к произведению всех его чисел. Найдите сумму всех таких обратных величин.

*А.Анджанс*

5. Найдите геометрическое место ортоцентров (точек пересечения высот) всевозможных треугольников, вписанных в данную окружность.

*Фольклор*

6. В футбольном турнире в один круг участвовало 28 команд. По окончании турнира оказалось, что более  $3/4$  всех игр закон-



чилось вничью. Докажите, что какие-то две команды набрали поровну очков.

*М. Вона, Венгрия*

7. Каждая клетка шахматной доски закрашена в один из цветов — синий или красный. Докажите, что клетки одного из цветов обладают тем свойством, что их может обойти шахматный ферзь (на клетках этого цвета ферзь может побывать не один раз, на клетки другого цвета он не ставится, но может через них перепрыгивать).

*А. Толпыго*

### 9—10 классы

8. Дана трапеция  $ABCD$ ,  $M$  — точка пересечения ее диагоналей. Известно, что боковая сторона  $AB$  перпендикулярна основаниям  $AD$  и  $BC$  и что в эту трапецию можно вписать окружность. Найдите площадь треугольника  $DCM$ , если радиус этой окружности равен  $r$ .

*Фольклор*

9. Существует ли такое  $N$  и такие  $N - 1$  бесконечных арифметических прогрессий с разностями  $2, 3, 4, \dots, N$ , что каждое натуральное число принадлежит хотя бы одной из этих прогрессий?

*Фольклор*

10. Существуют ли такие 100 треугольников, ни один из которых нельзя покрыть 99 остальными?

*Фольклор*

11. Через  $n!!$  обозначается произведение  $n(n-2)(n-4) \dots$  до единицы (или до двойки): например,  $6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2$ ;  $9!! = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$ . Докажите, что  $1985!! + 1986!!$  делится нацело на 1987.

*В. Произволов*

12. См. задачу 6.

13. Клетки шахматной доски  $8 \times 8$  как-то занумерованы числами от 1 до 32, при этом каждое число использовано дважды. Докажите, что можно так выбрать 32 клетки, занумерованные разными числами, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали найдется хотя бы по одной выбранной клетке.

*А. Анджанс*

14. На окружности имеется 21 точка. Докажите, что среди дуг, имеющих концами эти точки, найдется не меньше ста таких, угловая мера которых не превышает  $120^\circ$ .

*А. Сидоренко*

## Весна, 1987 год

### Базовый вариант

#### 7—8 классы

15. Докажите, что при любом  $a$  имеет место неравенство:

$$3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2.$$

*Фольклор*

16. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AK$ ,  $BL$ ,  $CM$ . Оказалось, что отрезок  $KL$  параллелен стороне  $AB$ , и что отрезок  $LM$  параллелен  $BC$ . Докажите, что отрезок  $KM$  параллелен  $AC$ .

*Фольклор*

17. Имеется два трехлитровых сосуда. В одном 1 л воды, в другом — 1 л двухпроцентного раствора поваренной соли. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой, после чего перемешивать. Можно ли за несколько таких переливаний получить полупроцентный раствор в том сосуде, в котором вначале была вода?

*С. Фомин*

18. Кафельная плитка имеет форму прямоугольного треугольника с катетами 1 дм и 2 дм. Можно ли из 20 таких плиток сложить квадрат?

*С. Фомин*

#### 9—10 классы

19. Можно ли число 1986 представить в виде суммы 6 квадратов нечетных чисел?

*Фольклор*

20. В пространстве даны параллелограмм  $ABCD$  и плоскость  $\alpha$ . Расстояния от точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  до плоскости  $\alpha$  равны  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно. Найдите расстояние  $d$  от вершины  $D$  до плоскости  $\alpha$ .

*Фольклор*

21. См. задачу 17.

**22.** На шахматной доске выбрана клетка. Сумма квадратов расстояний от ее центра до центров всех черных клеток обозначена через  $a$ , а до центров всех белых клеток — через  $b$ . Докажите, что  $a = b$ .

*А.Анджанс*

### Сложный вариант

#### 7—8 классы

**23.** Автомат при опускании гривенника выбрасывает пять двушек, а при опускании двушки — пять гривенников. Может ли Петя, подойдя к автомату с одной двушкой, получить после нескольких опусканий одинаковое количество двушек и гривенников?

*Ф.Назаров,*

*по мотивам задачи Ленинградской олимпиады 1987 г.*

**24.** Рассматривается выпуклый восьмиугольник. С помощью диагонали от него можно отрезать четырехугольник, причем это можно сделать восемью способами. Может ли случиться, что среди этих восьми четырехугольников имеется

а) четыре, б) пять

таких, в которые можно вписать окружность?

*П.Седракан*

**25.** В левый нижний угол шахматной доски  $8 \times 8$  поставлено в форме квадрата  $3 \times 3$  девять фишек. Фишка может прыгать на свободное поле через рядом стоящую фишку, т. е. симметрично отражаться относительно ее центра (прыгать можно по вертикали, горизонтали и диагонали).

Можно ли за некоторое количество таких ходов поставить все фишки вновь в форме квадрата  $3 \times 3$ , но в другом углу:

а) левом верхнем, б) правом верхнем?

*Я.Брискин*

**26.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $60^\circ$ . Докажите, что биссектриса одного из углов, образованных высотами  $BK$  и  $CL$ , проходит через центр  $O$  описанной окружности.

*В.Погребняк*

**27.** Имеется много кубиков одинакового размера, раскрашенных в шесть цветов. При этом каждый кубик раскрашен во все шесть цветов, каждая грань — в какой-нибудь один свой цвет, но расположение цветов на разных кубиках может быть различным. Кубики выложены на стол так, что получился прямоугольник.

Разрешается взять любой столбец этого прямоугольника, повернуть его вокруг длинной оси и положить на место. То же самое разрешается делать и со строками. Всегда ли можно с помощью таких операций добиться того, что все кубики будут смотреть вверх гранями одного и того же цвета?

*Д. Фомин*

### 9—10 классы

28. Пусть  $P(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что для некоторых целых  $a$  и  $b$  выполняется равенство  $P(a) - P(b) = 1$ . Докажите, что  $a$  и  $b$  различаются на 1.

*Фольклор*

29. Круг радиуса 1 покрыт семью одинаковыми кругами. Докажите, что их радиус не меньше  $1/2$ .

*Фольклор*

30. В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не имеют права участвовать в другом обмене). Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня.

*А. Шнирельман, Н. Константинов*

31. Докажите, что для любого  $n$  справедливо неравенство:

$$\sqrt{2 \cdot \sqrt{3 \cdot \dots \cdot \sqrt{(n-1) \cdot \sqrt{n}}}} < 3.$$

*В. Произволов*

32. Дан равносторонний треугольник  $ABC$ . Из его внутренней точки  $M$  опущены перпендикуляры на стороны  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$ ; их основания — точки  $D$ ,  $E$  и  $F$ . Найдите геометрическое место таких точек  $M$ , что треугольник  $DEF$  прямоугольный.

*Фольклор*

33. Двое играют на шахматной доске  $8 \times 8$ . Начинающий игру делает первый ход — ставит на доску коня. Затем они по очереди его передвигают, при этом нельзя ставить коня на поле, где он уже побывал. Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер?

*В. Зудилин*

# IX Турнир городов (1987/88)

Осень, 1987 год

## 7—8 классы

1. Докажите, что предпоследняя цифра любой степени числа три четна.

*В.Плачко*

2. Внутри ромба  $ABCD$  найти геометрическое место точек  $M$  таких, что  $\angle AMB + \angle CMD = 180^\circ$ .

*Фольклор*

3. Двое играющих по очереди увеличивают натуральное число так, чтобы при каждом увеличении разность между новым и старым значениями числа была бы больше нуля, но меньше старого значения. Начальное значение числа равно 2. Выигравшим считается тот, в результате хода которого получится 1987. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

*Фольклор*

4. Дана выпуклая фигура, ограниченная дугой  $AC$  окружности и ломаной  $ABC$  (так что дуга и ломаная лежат по разные стороны хорды  $AC$ ). Через середину дуги  $AC$  проведите прямую, делящую площадь фигуры пополам.

*Фольклор*

5. Даны три неотрицательных числа  $a, b, c$ . Про них известно, что  $a^4 + b^4 + c^4 \leq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ .

а) Докажите, что каждое из них не больше суммы двух других.

б) Докажите, что  $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca)$ .

в) Следует ли из неравенства пункта б) исходное неравенство?

*В.Сендеров*

6. В нескольких корзинах лежат 2000 яблок. Разрешается убирать корзины и вынимать яблоки из корзин. Докажите, что можно добиться того, чтобы во всех оставшихся корзинах было поровну яблок, а общее число яблок было не меньше 100.

*А.Разборов*

7. Три треугольника — белый, зеленый и красный — имеют общую внутреннюю точку  $M$ . Докажите, что можно выбрать по одной вершине из каждого треугольника так, чтобы точка  $M$

находилась внутри или на границе треугольника, образуемого выбранными вершинами.

*И. Барань*

### 9—10 классы

8. Из вершины  $A$  квадрата  $ABCD$  со стороной 1 проведены два луча, так пересекающие квадрат, что вершина  $C$  лежит между лучами. Угол между лучами равен  $\gamma$ . Из вершин  $B$  и  $D$  проведены перпендикуляры к лучам. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в основаниях этих перпендикуляров.

*Фольклор*

9. В центре квадратного бассейна находится мальчик, а в вершине на берегу стоит учительница. Максимальная скорость мальчика в воде в три раза меньше максимальной скорости учительницы на суше. Учительница плавать не умеет, а на берегу мальчик бежит быстрее учительницы. Сможет ли мальчик убежать?

*Фольклор*

10. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел  $a$  и  $b$  таких, что  $a^2 + 1$  делится на  $b$ , а  $b^2 + 1$  делится на  $a$ .

*Фольклор*

11. Из точки  $M$  внутри треугольника  $ABC$  опускаются перпендикуляры на высоты. Оказалось, что отрезки высот от вершин до оснований этих перпендикуляров равны между собой. Докажите, что в этом случае они равны диаметру вписанной в треугольник окружности.

*Фольклор*

12. Рассматриваются всевозможные пары различных натуральных чисел  $(a, b)$ , где  $a < b$ . Некоторые пары объявляются черными, остальные — белыми. Можно ли это сделать так, чтобы для любой тройки чисел  $a, a + d, a + 2d$  ( $d > 0$ ) среди пар  $(a, a + d)$ ,  $(a, a + 2d)$ ,  $(a + d, a + 2d)$  встречались и черные, и белые?

*Фольклор*

13. Правильный треугольник разбит прямыми, параллельными его сторонам, на равные между собой правильные треугольники. Один из маленьких треугольников черный, остальные — белые. Разрешается перекрашивать одновременно все треугольники, пересекаемые прямой, параллельной любой стороне исходного

треугольника. Всегда ли можно с помощью нескольких таких перекрашиваний добиться того, чтобы все маленькие треугольники стали белыми?

*Фольклор*

14. Город представляет собой бесконечную клетчатую плоскость (линии — улицы, клеточки — кварталы). На одной улице через каждые 100 кварталов на перекрестках стоит по милиционеру. Где-то в городе есть бандит (местонахождение его неизвестно, но перемещается он только по улицам). Цель милиции — увидеть бандита. Есть ли у милиции способ (алгоритм) наверняка достигнуть своей цели? (Максимальные скорости милиции и бандита — какие-то конечные, но не известные нам величины, милиция видит вдоль улиц во все стороны на бесконечное расстояние.)

*А.Анджанс*

## Весна, 1988 год

### Базовый вариант

#### 7—8 классы

15. Коля и Вася за январь получили по 20 оценок, причем Коля получил пятерок столько же, сколько Вася четверок, четверок столько же, сколько Вася троек, троек столько же, сколько Вася двоек, и двоек столько же, сколько Вася — пятерок. При этом средний балл за январь у них одинаковый. Сколько двоек за январь получил Коля?

*С.Фомин*

16. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ , диагональ  $AC$  которого делит среднюю линию  $MN$  ( $M$  — середина  $BC$ ,  $N$  — середина  $AD$ ) пополам. Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $ACD$  равновелики.

*Фольклор*

17. а) Вершины правильного десятиугольника закрашены черной и белой краской через одну. Двое играют в следующую игру. Каждый по очереди проводит отрезок, соединяющий вершины одинакового цвета. Эти отрезки не должны иметь общих точек (даже концов) с проведенными ранее. Побеждает тот, кто сделал последний ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий игру или его партнер?

б) Тот же вопрос для 12-угольника.

*В. Иванов*

**18.** В клетки шахматной доски записаны числа от 1 до 64 (первая горизонталь нумеруется слева направо числами от 1 до 8, вторая от 9 до 16 и т. д.). Перед некоторыми числами так поставлены плюсы, перед остальными — минусы, что в каждой горизонтали и в каждой вертикали по 4 плюса и по 4 минуса. Докажите, что сумма всех чисел равна 0.

*Фольклор*

### 9—10 классы<sup>1</sup>

**19.** Можно ли подобрать такие два натуральных числа  $X$  и  $Y$ , что  $Y$  получается из  $X$  перестановкой цифр и  $X + Y = 99 \dots 9$  (всего 1111 девяток)?

*Фольклор*

**20.** Можно ли подобрать четыре таких непрозрачных попарно непересекающихся шара, чтобы ими можно было загородить точечный источник света?

*Задача из Ленинграда*

**20а.** В окружность вписаны две равнобокие трапеции так, что каждая сторона одной трапеции параллельна некоторой стороне другой.

Докажите, что диагонали одной трапеции равны диагоналям другой.

*Фольклор*

**21.** Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что найдется прямая, параллельная стороне квадрата и пересекающая не меньше четырех окружностей.

*Д. Фомин*

**21а.** Среди десятизначных чисел каких больше: тех, которые можно представить как произведение двух пятизначных чисел, или тех, которые нельзя так представить?

*С. Фомин*

**22.** На бесконечной шахматной доске так расставлены пешки через три поля на четвертое, что они образуют квадратную сетку.

<sup>1</sup>Задачи 20, 21 давались только в Москве, задачи 20а, 21а — во всех других городах.



Докажите, что шахматный конь не может обойти все свободные поля, побывав на каждом поле по одному разу.

*А. Толпыго*

Сравните с задачей V.10.

### Сложный вариант

#### 7—8 классы

**23.** Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  — целые числа. Докажите, что если  $a = b + c$ , то  $a^4 + b^4 + c^4$  есть удвоенный квадрат целого числа.

*Фольклор*

**24.** Дан треугольник  $ABC$ . Две прямые, симметричные прямой  $AC$  относительно прямых  $AB$  и  $BC$  соответственно, пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что прямая  $BK$  проходит через центр описанной около треугольника  $ABC$  окружности.

*В. Протасов*

**25.** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} (x_3 + x_4 + x_5)^5 = 3x_1, \\ (x_4 + x_5 + x_1)^5 = 3x_2, \\ (x_5 + x_1 + x_2)^5 = 3x_3, \\ (x_1 + x_2 + x_3)^5 = 3x_4, \\ (x_2 + x_3 + x_4)^5 = 3x_5. \end{cases}$$

*Л. Тутеску*

**26.** В наборе имеются гири массой 1 г, 2 г, 4 г, ... (все степени числа 2), причем среди гирь могут быть одинаковые. На две чашки весов положили гири так, чтобы наступило равновесие. Известно, что на левой чашке все гири различны. Докажите, что на правой чашке не меньше гирь, чем на левой.

*Фольклор*

Сравните с задачей 32.

**27.** Можно ли покрыть плоскость окружностями так, чтобы через каждую точку проходило ровно 1988 окружностей?

*Н. Васильев*

**28.** Прямой угол разбит на бесконечное число квадратных клеток со стороны единица. Будем рассматривать ряды клеток, параллельные сторонам угла («вертикальные» и «горизонтальные»

ряды). Можно ли в каждую клетку записать натуральное число так, чтобы каждый вертикальный и каждый горизонтальный ряд клеток содержал все натуральные числа по одному разу?

*В.Шевелев*

29. Рассматривается последовательность слов из букв  $A$  и  $B$ . Первое слово —  $A$ , второе —  $B$ .  $K$ -е слово получается приписыванием к  $(K-2)$ -му слову справа  $(K-1)$ -го (начало последовательности имеет вид:  $A, B, AB, BAB, ABBA, \dots$ ). Может ли в последовательности встретиться «периодическое» слово, т. е. слово, состоящее из нескольких (по меньшей мере двух) одинаковых кусков, идущих друг за другом, и только из них? (Например, слово  $BABBBAB$  — периодическое, а слово  $ABABBBAB$  — нет.)

*А.Анджанс*

### 9—10 классы

30. При каком отношении оснований трапеции существует прямая, на которой 6 точек пересечения с диагоналями, боковыми сторонами и продолжениями оснований трапеции высекают 5 равных отрезков?

*Э.Готман*

31. См. задачу 28.

32. Пусть  $P(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что числа 1 и 2 являются его корнями. Докажите, что найдется коэффициент, который меньше  $-1$ .

*Фольклор*

33. Имеется множество билетов с номерами от 1 до 30 (номера могут повторяться). Каждый из учеников вытянул один билет. Учитель может произвести следующую операцию: прочитать список из нескольких (возможно — одного) номеров и попросить их владельцев поднять руки. Сколько раз он должен проделать такую операцию, чтобы узнать номер каждого ученика? Предостережение: учеников не обязательно 30.

*Фольклор*

34. Куб  $20 \times 20 \times 20$  составлен из 2000 кирпичей размером  $2 \times 2 \times 1$ . Докажите, что его можно проткнуть иглой так, чтобы игла прошла через две противоположные грани и не уткнулась в кирпич.

*А.Анджанс*

**35.** Рассматривается последовательность слов, состоящих из букв  $A$  и  $B$ . Первое слово в последовательности —  $A$ ,  $K$ -е слово получается из  $(K - 1)$ -го с помощью следующей операции: каждое  $A$  заменяется на  $AAB$ , каждое  $B$  — на  $A$ . Легко видеть, что каждое слово является началом следующего, тем самым получается бесконечная последовательность букв:  $AABAABAABAABAAB\dots$

**а)** На каком месте в этой последовательности встретится 1000-я буква  $A$ ?

**б)** Докажите, что эта последовательность — непериодическая.

*В. Гальперин*

Сравните с задачей XIII.14, а также с задачей XI.33.

# Х Турнир городов (1988/89)

Осень, 1988 год

Базовый вариант

## 7—8 классы

1. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше: доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

*Фольклор*

2. В треугольнике две высоты не меньше сторон, на которые они опущены. Найдите углы треугольника.

*Фольклор*

3. Докажите, что из любых семи натуральных чисел (не обязательно идущих подряд) можно выбрать три числа, сумма которых делится на три.

*Фольклор*

4. Каждую грань кубика разбили на четыре равных квадрата и раскрасили эти квадраты в три цвета так, чтобы квадраты, имеющие общую сторону, были покрашены в разные цвета. Докажите, что в каждый цвет покрашено по 8 квадратов.

*Фольклор*

## 9—10 классы

5. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки?

*Фольклор*

6. Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Докажите, что треугольники  $ABH$ ,  $ACH$  и  $BCH$  имеют одинаковый радиус описанной окружности.

*Фольклор*

Сравните с задачей XXIV.32.

7. Докажите, что в вершинах многогранника можно расставить натуральные числа так, что в каждом двух вершинах, соединенных ребром, стоят числа не взаимно простые (имеющие

общий делитель), а в каждом из двух вершинах, не соединенных ребром, взаимно простые.

*Фольклор*

8. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара цветов называется хорошей, если существует две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?

*Фольклор*

### Сложный вариант

#### 7—8 классы

9. В каждой вершине куба стоит число  $+1$  или  $-1$ . В центре каждой грани куба поставлено число, равное произведению чисел в вершинах этой грани. Может ли сумма получившихся 14 чисел оказаться равной 0?

*Г. Гальперин*

10. Внутри квадрата  $ABCD$  взята точка  $M$  такая, что  $\angle MAC = \angle MCD = \alpha$ . Найдите величину угла  $ABM$ .

*Фольклор*

11. Числа  $1, 2, 3, \dots, N$  записываются в некотором порядке:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$ . Берется сумма

$$S = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_N}{N}.$$

Найдите такое  $N$ , чтобы среди таких сумм (при всевозможных перестановках  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$ ) встретились все целые числа от  $N$  до  $N + 100$ .

*Фольклор*

12. а) Даны две одинаковые шестеренки с 14 зубьями каждая. Их наложили друг на друга так, что зубья совпали (так что проекция на плоскость выглядит как одна шестеренка). После этого четыре пары совпадающих зубьев выпилили. Всегда ли можно повернуть эти шестеренки друг относительно друга так, чтобы проекция на плоскость выглядела как одна целая шестеренка? (Шестеренки можно поворачивать, но нельзя переворачивать.)

б) Тот же вопрос про две шестеренки с 13 зубьями, из которых выпилили по 4 зуба.

*Фольклор*

13. Выпуклый  $n$ -угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Разрешается проделывать следующее преобразование (перестройку): взяв пару треугольников  $ABD$  и  $BCD$  с общей стороной, заменить их на треугольники  $ABC$  и  $ACD$ . Пусть  $P(n)$  — наименьшее число перестроек, за которое можно перевести любое разбиение в любое.

Докажите, что

а)  $P(n) \geq n - 3$ ;

б)  $P(n) \leq 2n - 7$ ;

в)  $P(n) \leq 2n - 10$  при  $n \geq 13$ .

*Д.Фомин, по мотивам W.Thurson, D.Sleator, R.Tarjan*

14. См. задачу 19.

### 9—10 классы

15. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить на шахматной доске, чтобы

1) среди отмеченных клеток не было соседних (имеющих общую сторону или общую вершину),

2) добавление к этим клеткам любой одной клетки нарушало пункт 1?

Укажите какую-нибудь систему таких клеток и докажите, что меньшим количеством обойтись нельзя.

*А.Анджанс*

16. Докажите, что  $a^2pq + b^2qr + c^2rp \leq 0$ , если  $a, b, c$  — стороны треугольника; а  $p, q, r$  — любые числа, удовлетворяющие условию  $p + q + r = 0$ .

*Я.Мустафаев*

17. Числа  $1, 2, 3, \dots, N$  записываются в строчку в таком порядке, что если где-то (не на первом месте) записано число  $i$ , то где-то слева от него встретится хотя бы одно из чисел  $i + 1$  и  $i - 1$ . Сколькими способами это можно сделать?

*А.Анджанс*

18. В стране 1988 городов и 4000 дорог. Докажите, что можно указать кольцевой маршрут, проходящий не более чем через 20 городов (каждая дорога соединяет два города).

*А.Разборов*

19. Существует ли такое натуральное число  $M$ , что никакое натуральное число, десятичная запись которого состоит лишь из нулей и не более чем 1988 единиц, не делится на  $M$ ?

*Фольклор*

20. Пусть  $M$  — внутренняя точка прямоугольника  $ABCD$ ,  $S$  — его площадь. Докажите, что  $S \leq AM \cdot CM + BM \cdot DM$ .

*И. Гольдшейд*

## Весна, 1989 год

### Базовый вариант

#### 7—8 классы

21. Положительные числа  $a, b, c$  таковы, что  $a \geq b \geq c$  и  $a + b + c \leq 1$ . Докажите, что  $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1$ .

*Ф. Назаров*

22. В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $AM$ . Может ли радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABM$ , быть ровно в 2 раза больше радиуса окружности, вписанной в треугольник  $ACM$ ?

*Д. Фомин*

23. Какую цифру надо поставить вместо знака «\*» в числе  $888 \dots 88 * 99 \dots 999$  (восьмерка и девятка написаны по 50 раз), чтобы оно делилось на 7?

*М. Гусаров*

24. Можно ли нарисовать на поверхности кубика Рубика такой замкнутый путь, который проходит через каждый квадратик ровно один раз (через вершины квадратиков путь не проходит)?

*С. Фомин*

#### 9—10 классы

25. Положительные числа  $a, b, c, d$  таковы, что  $a \leq b \leq c \leq d$  и  $a + b + c + d \geq 1$ . Докажите, что  $a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 \geq 1$ .

*Ф. Назаров*

26. Известно, что в трапецию  $ABCD$  можно вписать окружность. Докажите, что круги, построенные на ее боковых сторонах как на диаметрах, касаются друг друга.

*Фольклор*

27. Найдите шесть различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится на сумму этих двух чисел.

*Д. Фомин*

28. Можно ли провести в каждом квадратике на поверхности кубика Рубика диагональ так, чтобы получился несамопересекающийся путь?

*С. Фомин*

### Сложный вариант

#### 7—8 классы

29. Лестница имеет 100 ступенек. Коля хочет спуститься по лестнице, при этом он двигается начиная сверху прыжками по очереди вниз и вверх. Прыжки бывают трех типов — на шесть ступенек (через пять на шестую), на семь и на восемь. Два раза на одну ступеньку Коля не становится. Сможет ли он спуститься?

*С. Фомин*

30. На некотором поле шахматной доски стоит фишка. Двое по очереди переставляют фишку, при этом на каждом ходу, начиная со второго, расстояние, на которое она перемещается, должно быть строго больше, чем на предыдущем ходу. Проигравшим считается тот, кто не может сделать очередного хода. Кто выигрывает при правильной игре?

*Ф. Назаров*

Сравните с задачей XVII.34.

31. Выпуклые четырехугольники  $ABCD$  и  $PQRS$  вырезаны соответственно из бумаги и картона. Будем говорить, что они подходят друг к другу, если выполняются два условия:

1) картонный четырехугольник можно наложить на бумажный так, что его вершины попадут на стороны бумажного, по одной вершине на каждую сторону;

2) если после этого перегнуть четыре образовавшихся маленьких бумажных треугольника на картонный, то они закроют весь картонный четырехугольник в один слой.

а) Докажите, что, если четырехугольники подходят друг к другу, то у бумажного либо две противоположные стороны параллельны, либо диагонали перпендикулярны.



б) Докажите, что если  $ABCD$  — параллелограмм, то можно сделать подходящий к нему картонный четырехугольник.

*Н. Васильев*

32. Докажите, что если  $k$  чётно, то числа от 1 до  $k - 1$  можно выписать в таком порядке, что сумма никаких нескольких подряд стоящих чисел не будет делиться на  $k$ .

*Фольклор*

Сравните с задачей XXVI.10, а также с задачей XXI.17.

33. Из центра окружности выходят  $n$  векторов, концы которых делят ее на  $n$  равных дуг. Некоторые векторы синие, остальные — красные. Подсчитаем сумму углов «красный вектор — синий вектор» (каждый угол вычисляется от красного вектора к синему против часовой стрелки) и разделим ее на общее число всех таких углов. Докажите, что полученная величина «среднего угла» равна  $180^\circ$ .

*В. Произолов*

34. а) Докажите, что если в  $3n$  клетках таблицы  $2n \times 2n$  расставлены  $3n$  звездочек, то можно вычеркнуть  $n$  столбцов и  $n$  строк так, что все звездочки будут вычеркнуты.

б) Докажите, что в таблице  $2n \times 2n$  можно расставить  $3n + 1$  звездочку так, что при вычеркивании любых  $n$  строк и любых  $n$  столбцов остается невычеркнутой хотя бы одна звездочка.

*К. Кохась*

## 9—10 классы

35. Найдите такие два шестизначных числа, что если их приписать друг к другу, то полученное 12-значное число делится на произведение двух исходных чисел. Найдите все такие пары чисел.

*М. Гусаров*

Сравните с задачей XV.29.

36. Внутри треугольника  $ABC$  взята такая точка  $M$ , что

$$\angle BMC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC,$$

и прямая  $AM$  содержит центр  $O$  окружности, описанной около треугольника  $BMC$ . Докажите, что  $M$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

*Фольклор*

37. Даны 1000 линейных функций:

$$f_k(x) = p_k x + q_k \quad (k = 1, 2, \dots, 1000).$$

Нужно найти значение их композиции

$$f(x) = f_1(f_2(f_3(\dots f_{1000}(x) \dots)))$$

в точке  $x_0$ .

Докажите, что это можно сделать не больше, чем за 30 стадий, если на каждой стадии можно параллельно выполнять любое число арифметических операций над парами чисел, полученных на предыдущих стадиях, а на первой стадии используются числа  $p_1, p_2, \dots, p_{1000}, q_1, q_2, \dots, q_{1000}, x_0$ .

*С. Фомин*

38. В кооперативе из 11 человек имеется партиячейка. На каждом собрании ячейки происходит либо прием одного члена в партию, либо исключение из партии одного человека. В партиячейке не может быть меньше трех человек. Возвращаться к какому-либо из прежних составов партиячейки запрещено уставом. Может ли к какому-то моменту оказаться, что все варианты состава ячейки реализованы?

*С. Фомин*

39. На плоскости дано  $N$  прямых ( $N > 1$ ), никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. Докажите, что в частях, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно так расставить ненулевые целые числа, по модулю не превосходящие  $N$ , что суммы чисел по любую сторону от любой из данных прямых равны нулю.

*Д. Фомин*

40. Дан 101 прямоугольник с целыми сторонами, не превышающими 100. Докажите, что среди них найдутся три прямоугольника  $A, B, C$ , которые можно поместить друг в друга (так, что  $A \subset B \subset C$ ).

*Н. Седракян*

# XI Турнир городов (1989/90)

Осень, 1989 год

Базовый вариант

## 8—9 классы

1. Три бегуна —  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — участвуют в забеге.  $Z$  задержался на старте и выбежал последним, а  $Y$  выбежал вторым. Бегун  $Z$  во время забега менялся местами с другими участниками 6 раз, а  $X$  — 5 раз. Известно, что  $Y$  финишировал раньше  $X$ . В каком порядке они финишировали?

*Фольклор*

2. Длины сторон остроугольного треугольника — последовательные целые числа. Докажите, что высота, опущенная на среднюю по величине сторону, делит ее на отрезки, разность которых равна 4.

*Фольклор*

3. Дано 1989 чисел. Известно, что сумма любых 10 из них положительна. Докажите, что сумма всех чисел тоже положительна.

*Фольклор*

4. Решить в натуральных числах уравнение:

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}.$$

*Г.Гальперин*

## 10—11 классы

5. Десять друзей послали друг другу праздничные открытки, каждый послал 5 открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.

*Фольклор*

6. На плоскости заданы точки  $K$ ,  $L$  и  $M$ , являющиеся серединами трех последовательных сторон четырехугольника, которые равны между собой. Восстановите четырехугольник.

*Фольклор*

7. Существует ли 1 000 000 таких различных натуральных чисел, что никакая сумма нескольких из этих чисел не является полным квадратом?

*Фольклор*

8. Числа  $2^{1989}$  и  $5^{1989}$  выписали одно за другим (в десятичной записи). Сколько всего цифр выписано?

*Г. Гальперин*

Сравните с задачей XXVII.43.

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

9. Найдите число решений в натуральных числах уравнения:  $[x/10] = [x/11] + 1$ .

*Фольклор*

10. Шестиугольник  $ABCDEF$  вписан в окружность;  $AB = BC = a$ ,  $CD = DE = b$ ,  $EF = FA = c$ . Докажите, что площадь треугольника  $BDF$  равна половине площади шестиугольника.

*И. Нагель*

Сравните с задачей XVIII.34.

11. Плоскость разбита тремя сериями параллельных прямых на равные между собой равносторонние треугольники. Существуют ли 4 вершины этих треугольников, образующие квадрат?

*Фольклор*

12. Дано натуральное число  $N$ . Рассматриваются такие тройки различных натуральных чисел  $(a, b, c)$ , что  $a + b + c = N$ . Возьмем наибольшую возможную такую систему троек, что никакие две тройки системы не имеют общих элементов. Число троек в этой системе обозначим через  $K(N)$ . Докажите, что

а)  $K(N) > N/6 - 1$ ; б)  $K(N) < 2N/9$ .

*Л. Курляндчик*

13. Имеется прямоугольная доска  $m \times n$ , разделенная на клетки  $1 \times 1$ . Кроме того, имеется много косточек домино размером  $1 \times 2$ . Косточки так уложены на доску, что каждая косточка занимает две клетки. Доска заполнена не целиком, но так, что сдвинуть косточки невозможно (доска имеет бортики, косточки не могут выходить за пределы доски). Докажите, что число непокрытых клеток а) меньше  $mn/4$ ; б) меньше  $mn/5$ .

*Фольклор*

14. Правильный шестиугольник  $ABCDEF$  разрезан на  $N$  равновеликих параллелограммов. Докажите, что  $N$  делится на 3.

*В. Прасолов, И. Шарыгин*

## 10—11 классы

15. Можно ли так выбрать шар, треугольную пирамиду и плоскость, чтобы всякая плоскость, параллельная выбранной, пересекала шар и пирамиду по фигурам равной площади?

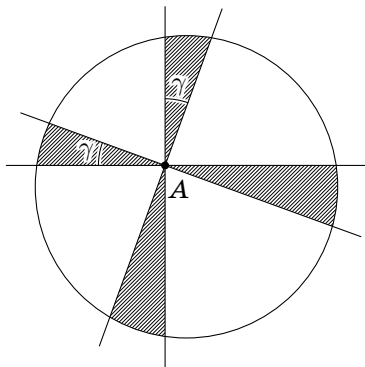
*Фольклор*

16. Рассмотрим все возможные наборы чисел из множества  $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ , не содержащие двух соседних чисел. Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна  $(N+1)! - 1$ .

*По мотивам R.P.Stanley*

17. Внутри круга радиуса  $R$  взята точка  $A$ . Через нее провели две перпендикулярные прямые. Потом прямые повернули на угол  $\gamma$  относительно точки  $A$ . Хорды, отсекаемые окружностью из этих прямых, замели при повороте фигуру, имеющую форму мальтийского креста с центром в точке  $A$ . Найдите площадь креста.

*Фольклор*



18. Натуральный ряд представлен в виде объединения некоторого множества попарно непересекающихся целочисленных бесконечных арифметических прогрессий с положительными разностями  $d_1, d_2, d_3, \dots$ . Может ли случиться, что при этом сумма  $1/d_1 + 1/d_2 + 1/d_3 + \dots$  не превышает 0,9? Рассмотрите случаи:

а) общее число прогрессий конечно;

б) прогрессий бесконечное число (в этом случае условие нужно понимать в том смысле, что сумма любого конечного числа слагаемых из бесконечной суммы не превышает 0,9).

*А. Толпыго*

19. Отмечено 100 точек —  $N$  вершин выпуклого  $N$ -угольника и  $100 - N$  точек внутри этого  $N$ -угольника. Точки как-то обозначены, независимо от того, какие являются вершинами  $N$ -угольника, а какие лежат внутри. Известно, что никакие три точки не лежат на одной прямой, а никакие четыре — на двух параллельных прямых. Разрешается задавать вопросы типа: чему равна площадь треугольника  $XYZ$  ( $X, Y, Z$  — из числа отмеченных точек)? Докажите, что 300 вопросов достаточно, чтобы выяснить, какие точки являются вершинами, и чтобы найти площадь  $N$ -угольника.

*Д. Фомин*

20. В прямоугольной таблице  $m$  строк и  $n$  столбцов ( $m < n$ ). В некоторых клетках таблицы стоят звездочки, так что в каждом столбце стоит хотя бы одна звездочка. Докажите, что существует хотя бы одна такая звездочка, что в одной строке с нею находится больше звездочек, чем с нею в одном столбце.

*А. Разборов*

## Весна, 1990 год

### Базовый вариант

#### 8—9 классы

21. Докажите, что при любом натуральном  $n$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1\right)^2 = 2n - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

*С. Манукян*

22. Даны две окружности, лежащие вне друг друга. Точки  $A$  и  $A'$  — наиболее удаленные друг от друга точки пересечения этих окружностей с их линией центров,  $A$  лежит на первой окружности,  $A'$  — на второй. Из точки  $A$  проведены два луча, касающиеся второй окружности, и построен круг  $K$ , касающийся этих лучей и первой окружности изнутри. Из точки  $A'$  проведены два луча, касающиеся первой окружности, и построен круг  $K'$ , касающийся этих лучей и второй окружности изнутри. Докажите, что круги  $K$  и  $K'$  равны.

*Й. Табов*

23. Дано 27 кубиков одинакового размера: 9 красных, 9 синих и 9 белых. Можно ли сложить из них куб таким образом, чтобы каждый столбик из трех кубиков содержал кубики ровно двух

цветов? (Рассматриваются столбики, параллельные всем ребрам куба, всего 27 столбиков.)

*С. Фомин*

**24.** См. задачу 28.

### **10—11 классы**

**25.** Построить треугольник по двум сторонам, если известно, что медиана, проведенная к третьей стороне, делит угол треугольника в отношении 1 : 2.

*В. Чикин*

**26.** Докажите, что

**а)** если натуральное число  $n$  можно представить в виде  $n = 4k + 1$ , то существуют  $n$  нечетных натуральных чисел, сумма которых равна их произведению;

**б)** если  $n$  нельзя представить в таком виде, то таких  $n$  нечетных натуральных чисел не существует.

*М. Концевич*

**27.** Какое минимальное количество точек на поверхности

**а)** додекаэдра, **б)** икосаэдра  
надо отметить, чтобы на каждой грани была хотя бы одна отмеченная точка?

*Г. Гальперин*

**28.** Даны **а)** 61 монета, **б)** 103 монеты одинакового внешнего вида. Известно, что две из них — фальшивые, что все настоящие одинакового веса, что фальшивые — тоже одинакового веса, отличающегося от веса настоящих монет. Но неизвестно, в какую сторону отличаются веса фальшивых монет от настоящих. Как можно это узнать с помощью трех взвешиваний на двухчашечных весах без гирь? (Отделить фальшивые монеты не требуется.)

*Д. Фомин*

Вариант **а)** был предложен в 8—9 классах, вариант **б)** — в 10—11 классах.

### **Сложный вариант**

#### **8—9 классы**

**29.** На какое максимальное число частей могут разбить координатную плоскость  $xOy$  графики 100 квадратных трехчленов вида  $y = a_n x^2 + b_n x + c_n$  ( $n = 1, 2, \dots, 100$ )?

*Н. Васильев*

**30.** Если повернуть квадрат вокруг его центра на  $45^\circ$ , то стороны повернутого квадрата разобьют каждую сторону первоначального квадрата на три отрезка, длины которых относятся как  $a:b:a$  (эти отношения легко вычислить). Для произвольного выпуклого четырехугольника сделаем аналогичное построение: разобьем каждую его сторону в тех же отношениях  $a:b:a$  и проведем прямую через каждые две точки деления, соседние с вершиной (лежащие на сходящихся к ней сторонах). Докажите, что площадь четырехугольника, ограниченного четырьмя построенными прямыми, равна площади исходного четырехугольника.

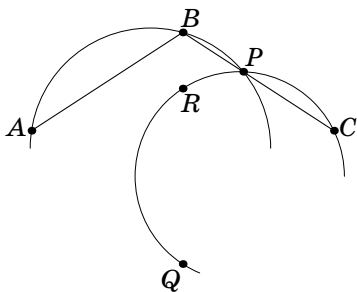
*А. Савин*

**31.** В ряд стоят 15 слонов, каждый из которых весит целое число килограммов. Если взять любого слона, кроме стоящего справа, и прибавить к его весу удвоенный вес его правого соседа, то получится 15 тонн (для каждого из 14 слонов). Найдите вес каждого из 15 слонов.

*Ф. Назаров*

**32.** Дан ромб  $ABCD$ . На стороне  $BC$  взята точка  $P$ , через  $A$ ,  $B$  и  $P$  проведена окружность, которая пересекается с прямой  $BD$  еще раз в точке  $Q$ . Через точки  $C$ ,  $P$  и  $Q$  проведена окружность, которая пересекается с  $BD$  еще раз в точке  $R$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $R$  и  $P$  лежат на одной прямой.

*Д. Фомин*



**33.** Сколько существует таких пар натуральных чисел  $m$ ,  $n$ , каждое из которых не превышает 1000, для которых выполнено неравенство

$$\frac{m}{n+1} < \sqrt{2} < \frac{m+1}{n}?$$

*Д. Фомин*



**34.** Рассматривается набор гирь, каждая из которых весит целое число граммов, а общий вес всех гирь равен 200 граммам. Такой набор называется правильным, если любое тело, имеющее вес, выраженный целым числом граммов от 1 до 500, может быть уравновешено некоторым количеством гирь набора, и притом единственным образом (тело кладется на одну чашку весов, гири — на другую; два способа уравновешивания, различающиеся лишь заменой некоторых гирь на другие того же веса, считаются одинаковыми).

**а)** Приведите пример правильного набора, в котором не все гири по одному грамму.

**б)** Сколько существует различных правильных наборов? (Два набора различны, если некоторая гиря участвует в этих наборах не одинаковое число раз.)

*Д.Фомин*

### 10—11 классы

**35.** Докажите, что при любом натуральном  $n$  найдется ненулевой многочлен  $P(x)$  с коэффициентами, равными 0,  $-1$ ,  $1$  степени не больше  $2^n$ , который делится на  $(x-1)^n$  без остатка.

*Д.Фомин*

**36.** См. задачу 34, но общий вес всех гирь равен 500 граммам.

**37.** Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо  $p$  человек, либо  $q$  ( $p$  и  $q$  взаимно просты). На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?

*Д.Фомин*

Сравните с задачей XIII.15.

**38.** В трапеции  $ABCD$   $AB$  — основание,  $AC = BC$ ,  $H$  — середина  $AB$ . Пусть  $l$  — прямая, проходящая через  $H$  и пересекающая прямые  $AD$  и  $BD$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Докажите, что либо углы  $ACP$  и  $QCB$  равны, либо их сумма равна  $180^\circ$ .

*И.Шарыгин*

**39.** Существует ли выпуклый многогранник, одно из сечений которого (сечение не проходит через вершины) — треугольник, и в каждой вершине сходятся

**а)** не меньше пяти ребер, **б)** ровно пять ребер?

*Г.Гальперин*

40. На квадратный лист бумаги со стороной  $a$  посадили несколько клякс, площадь каждой из которых не больше 1. Оказалось, что каждая прямая, параллельная сторонам листа, пересекает не более одной кляксы. Докажите, что суммарная площадь клякс не больше  $a$ .

*А. Разборов*

## ХII Турнир городов (1990/1991)

Осень, 1990 год

Базовый вариант

### 8—9 классы

1. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то сумма больше четырех.

*Н. Васильев*

2. Вершины правильного треугольника находятся на сторонах  $AB$ ,  $CD$  и  $EF$  правильного шестиугольника  $ABCDEF$ . Докажите, что они имеют общий центр.

*Н. Седракан*

3. Найдите 10 различных натуральных чисел, обладающих тем свойством, что их сумма делится на каждое из них.

*С. Фомин*

Сравните с задачей XVII.2.

4. Доска  $100 \times 100$  разбита на 10 000 единичных квадратиков. Один из них вырезали, при этом образовалась дырка. Можно ли оставшуюся часть доски так покрыть равнобедренными прямоугольными треугольниками с гипотенузой длины 2, чтобы их гипотенузы шли по сторонам квадратиков, а катеты — по диагоналям и чтобы треугольники не налегали друг на друга и не свисали с доски?

*С. Фомин*

### 10—11 классы

5. В клетках доски  $n \times n$  произвольно расставлены числа от 1 до  $n^2$ . Докажите, что найдутся две такие соседние клетки (имеющие общую вершину или общую сторону), что стоящие в них числа отличаются не меньше, чем на  $n + 1$ .

*Н. Седракан*

6. Тремя бесконечными сериями равноотстоящих параллельных прямых плоскость разбита на равносторонние треугольники со стороной 1. Пусть  $M$  — множество всех их вершин,  $A$  и  $B$  — две вершины одного треугольника. Разрешено поворачивать плоскость на  $120^\circ$  вокруг любой из вершин множества  $M$ . Можно ли за несколько таких преобразований перевести точку  $A$  в точку  $B$ ?

*Н. Васильев*

7. На стене висят двое правильно идущих совершенно одинаковых часов. Одни показывают московское время, другие — местное. Минимальное расстояние между концами их часовых стрелок равно  $m$ , а максимальное —  $M$ . Найдите расстояние между центрами этих часов.

*С. Фомин*

8. В нашем распоряжении имеются «кирпичи», имеющие форму, которая получается следующим образом: так приклеиваем к одному единичному кубу по трем его граням, имеющим общую вершину, еще три единичных куба, что склеиваемые грани полностью совпадают. Можно ли сложить прямоугольный параллелепипед  $11 \times 12 \times 13$  из таких «кирпичей»?

*С. Фомин*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

9. Дано:

$$a = \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \dots \frac{1}{98 + \frac{1}{99}}}}, \quad b = \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \dots \frac{1}{99 + \frac{1}{100}}}}.$$

Докажите, что  $|a - b| < \frac{1}{99! \cdot 100!}$ .

*Г. Гальперин*

10. Дана полуокружность  $\Gamma$  с концами  $A$  и  $B$ . Для произвольной точки  $C \in \Gamma$  ( $C \neq A$ ,  $C \neq B$ ) на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону треугольника построены квадраты. Найдите геометрическое место середины отрезка, соединяющего их центры, когда  $C$  описывает  $\Gamma$ .

*Й. Табов*

11. Квадрат  $8 \times 8$  клеток выкрашен в белый цвет. Разрешается выбрать в нем любой прямоугольник из трех клеток и перекрасить все их в противоположный цвет (белые в черный, черные — в белый). Удастся ли несколькими такими операциями перекрасить весь квадрат в черный цвет?

*И. Рубанов*

Сравните с задачей VI.20.

12. Стороны  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  четырехугольника  $ABCD$  равны соответственно сторонам  $A'B'$ ,  $B'C'$ ,  $C'D'$  и  $D'A'$  четырехугольника

$A'B'C'D'$ , причем известно, что сторона  $AB$  параллельна  $CD$ , а сторона  $B'C'$  параллельна  $D'A'$ . Докажите, что оба четырехугольника — параллелограммы.

*В.Произволов*

13. Числовая последовательность  $\{x_n\}$  такова, что для любого  $n > 1$  выполняется условие:

$$x_{n+1} = |x_n| - x_{n-1}.$$

Докажите, что последовательность периодическая с периодом 9, т.е. для любого  $n \geq 1$  выполняется условие:  $x_n = x_{n+9}$ .

*М.Концевич*

14. В колоду сложено  $n$  различных карт. Разрешается переложить любое число рядом лежащих карт (не меняя порядок их следования и не переворачивая) в другое место колоды. Требуется несколькими такими операциями переложить все  $n$  карт в обратном порядке.

а) Докажите, что при  $n = 9$  это можно сделать за 5 операций.

Докажите, что при  $n = 52$  сделать это

б) можно за 27 операций;

в) нельзя за 17 операций;

г) нельзя за 26 операций.

*С.Воронин*

## 10—11 классы

15. См. задачу 9.

16. На дуге  $AC$  окружности, описанной около правильного треугольника  $ABC$ , взята точка  $M$ ;  $P$  — середина этой дуги. Пусть  $N$  — середина хорды  $BM$ ,  $K$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $P$  на  $MC$ . Докажите, что треугольник  $ANK$  — правильный.

*И.Нагель*

17. Рассматривается конечное множество  $M$  единичных квадратов на плоскости. Их стороны параллельны осям координат (разрешается, чтобы квадраты пересекались). Известно, что для любой пары квадратов расстояние между их центрами не больше 2. Докажите, что существует единичный квадрат (не обязательно из множества  $M$ ) со сторонами, параллельными осям, пересекающийся хотя бы по точке с каждым квадратом множества  $M$ .

*А.Анджанс*

18. На плоскости расположено 20 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, из них 10 синих и 10 красных. Докажите, что можно провести прямую, по каждую сторону которой лежит 5 синих и 5 красных точек.

*А. Кушниренко*

19. В треугольнике  $ABC$   $AC = CB$ ,  $D$  — точка  $AB$  такая, что радиус окружности, вписанной в треугольник  $ACD$ , и радиус окружности, касающейся отрезка  $DB$  и продолжений прямых  $CD$  и  $CB$  и лежащей вне треугольника  $DCB$ , равны. Докажите, что этот радиус  $r$  равен одной четверти высоты  $h$  треугольника  $ABC$ , проведенной к боковой стороне.

*И. Шарыгин*

20. См. задачу 14.

## Весна, 1991 год

### Базовый вариант

#### 8—9 классы

21. Имеется  $n$  целых чисел ( $n > 1$ ). Известно, что каждое из них отличается от произведения всех остальных на число, кратное  $n$ . Докажите, что сумма квадратов этих чисел делится на  $n$ .

*Д. Фомин*

22. Каждая из трех окружностей радиусов соответственно 1,  $r$  и  $r$  извне касается двух других. При каких значениях  $r$  существует треугольник, описанный около этих окружностей? (Все окружности лежат внутри треугольника, каждая касается двух сторон треугольника и каждая сторона треугольника касается двух окружностей.)

*Н. Васильев*

23. В ряд стоят 30 сапог: 15 левых и 15 правых. Докажите, что среди некоторых десяти подряд стоящих сапог левых и правых поровну.

*Д. Фомин*

24. На экране компьютера горит число, которое каждую минуту увеличивается на 102. Начальное значение числа 123. Программист Федя имеет возможность в любой момент изменять порядок цифр числа, находящегося на экране. Может ли он добиться того, чтобы число никогда не стало четырехзначным?

*Ленинградский фольклор*

**10—11 классы**

**25.** Укажите все такие натуральные  $n$  и целые не равные друг другу  $x$  и  $y$ , при которых верно равенство:

$$x + x^2 + x^4 + x^8 + \dots + x^{2^n} = y + y^2 + y^4 + \dots + y^{2^n}.$$

*Фольклор*

**26.** На окружности даны точки  $K$  и  $L$ . Постройте треугольник  $ABC$  такой, что  $KL$  является его средней линией, параллельной  $AB$ , и при этом точка  $C$  и точка  $O$  пересечения медиан треугольника  $ABC$  лежат на данной окружности.

*Фольклор*

**27.** На доске выписаны числа  $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/100$ . Выбираем из написанных на доске два произвольных числа  $a$  и  $b$ , стираем их и пишем на доску число  $a + b + ab$ . Такую операцию проделываем 99 раз, пока не останется одно число. Какое это число? Найдите его и докажете, что оно не зависит от последовательности выбора чисел.

*Д. Фомин*

**28.** Можно ли так расположить в пространстве

а) пять деревянных кубов,

б) шесть деревянных кубов,

чтобы каждый имел общую часть грани с каждым? (Общая часть должна быть многоугольником.)

*Фольклор*

**Сложный вариант****8—9 классы**

**29.** Докажите, что произведение 99 дробей  $\frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$ , где  $k = 2, 3, \dots, 100$ , больше  $2/3$ .

*Д. Фомин*

**30.** В описанном пятиугольнике  $ABCDE$  диагонали  $AD$  и  $CE$  пересекаются в центре  $O$  вписанной окружности. Докажите, что отрезок  $BO$  и сторона  $DE$  перпендикулярны.

*Фольклор*

**31.** Ищутся такие натуральные числа, оканчивающиеся на 5, что в их десятичной записи цифры монотонно не убывают (т.е.

каждая цифра, начиная со второй, не меньше предыдущей цифры), и в десятичной записи их квадрата цифры тоже монотонно не убывают.

а) Найдите 4 таких числа.

б) Докажите, что таких чисел бесконечно много.

*А.Анджанс*

**32.** Круг поделили хордой  $AB$  на две дуги. Пусть  $C$ ,  $D$  — середины этих дуг. Затем одну из дуг повернули вокруг точки  $A$  на некоторый угол. При этом точка  $B$  перешла в точку  $B'$ , точка  $C$  в точку  $C'$ . Докажите, что отрезки, соединяющие точки  $D$  и  $C'$  с серединой отрезка  $BB'$ , перпендикулярны друг другу.

*З.Насыров*

**33.** В королевстве 8 городов. Король хочет построить такую систему дорог, чтобы из каждого города можно было попасть в каждый, минуя не более одного промежуточного города, и чтобы из каждого города выходило не более  $k$  дорог. При каких  $k$  это возможно?

*С.Фомин*

Сравните с задачей 39.

**34. а)** В соревновании участвуют 16 боксеров. Каждый боксер в течение одного дня может проводить только один бой. Известно, что все боксеры имеют разную силу, и что сильнейший всегда выигрывает. Докажите, что за 10 дней можно определить место каждого боксера. (Расписание каждого дня соревнований составляется вечером накануне и в день соревнований не изменяется.)

б) Та же задача, но боксеров имеется 32, и дается 15 дней.

*А.Анджанс*

Задача а) предлагалась в 8—9 классах, задача б) — в 10—11 классах.

Сравните с задачей XIII.41.

### **10—11 классы**

**35.** См. задачу 31, только пункт б).

**36.** В окружности фиксирована хорда  $MN$ . Для каждого диаметра  $AB$  этой окружности рассмотрим точку  $C$ , в которой пересекаются прямые  $AM$  и  $BN$ , и проведем через нее прямую  $l$ , перпендикулярную  $AB$ . Докажите, что все прямые  $l$  проходят через одну точку.

*Е.Куланин*



**37.** Даны  $n$  чисел  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , удовлетворяющие двум условиям:  $\sum x_k = 0$ ;  $\sum x_k^2 = 1$ .

Докажите, что из них найдутся два числа, произведение которых не больше  $-1/n$ .

*Фольклор*

**38.** На сфере отмечено 5 точек, никакие три из которых не лежат на большой окружности. Две большие окружности, не проходящие через отмеченные точки, называются эквивалентными, если одну из них с помощью непрерывного перемещения по сфере можно перевести в другую так, что в процессе перемещения окружность не проходит через отмеченные точки.

**а)** Сколько можно нарисовать окружностей, не проходящих через отмеченные точки, и не эквивалентных друг другу?

**б)** Та же задача для  $n$  отмеченных точек.

*А. Канель-Белов*

**39.** В королевстве 16 городов. Король хочет построить такую систему дорог, чтобы из каждого города можно было попасть в каждый, минуя не более одного промежуточного города, и чтобы из каждого города выходило не более 5 дорог.

**а)** Докажите, что это возможно.

**б)** Докажите, что если в формулировке заменить число 5 на число 4, то желание короля станет неосуществимым.

*С. Фомин*

Сравните с задачей 33.

**40.** См. задачу 34.

# ХІІІ Турнір городов (1991/92)

Осень, 1991 год

Базовый вариант

8—9 классы

1. Через центр  $O$  первой окружности проведена вторая окружность;  $A$  и  $B$  — точки их пересечения. Касательная ко второй окружности в точке  $B$  пересекает первую окружность в точке  $C$ . Докажите, что  $AB = BC$ .

*В. Прасолов*

Сравните с задачей XXVI.43.

2. (*Летучая ладья*.) На шахматной доске  $4 \times 4$  расположена фигура — «летучая ладья», которая ходит так же, как обычная ладья, но не может за один ход стать на поле, соседнее с предыдущим. Может ли она за 16 ходов обойти всю доску, становясь на каждое поле по разу, и вернуться на исходное поле?

*А. Толпыго*

3. Докажите, что

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \dots + \frac{1}{1991}}}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \dots + \frac{1}{1991}}}}} = 1.$$

*Г. Гальперин*

4. На окружности записаны 6 чисел: каждое равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найдите эти числа.

*Фольклор*

10—11 классы

5. Внутри угла расположены две окружности с центрами  $A$  и  $B$ . Они касаются друг друга и двух сторон угла. Докажите, что окружность с диаметром  $AB$  касается сторон угла.

*В. Прасолов*

6. В лес за грибами пошли 11 девочек и  $n$  мальчиков. Вместе они собрали  $n^2 + 9n - 2$  гриба, причем все они собрали поровну грибов. Кого было больше: мальчиков или девочек?

*А. Толпыго*

7. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AB$  выбрана такая точка  $D$ , что  $AD/DC = AB/BC$ . Докажите, что угол  $C$  — тупой.

*С. Берлов*

8. На окружности записаны 30 чисел: каждое равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найдите эти числа.

*Фольклор*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

9. В некотором королевстве было 32 рыцаря. Некоторые из них были вассалами других (вассал может иметь только одного сюзерена, причем сюзерен всегда богаче своего вассала). Рыцарь, имевший не менее четырех вассалов, носил титул барона. Какое наибольшее число баронов могло быть при этих условиях? (В королевстве действовал закон: «вассал моего вассала — не мой вассал».)

*А. Толпыго*

10. Пусть  $A$  — вершина равнобедренного треугольника,  $BC$  — основание,  $\angle BAC = 20^\circ$ . На стороне  $AB$  отложен отрезок  $AD$ , равный  $BC$ . Найдите величину угла  $BCD$ .

*И. Шарыгин*

11. а) Можно ли в таблицу  $4 \times 4$  расставить такие натуральные числа, что одновременно выполняются следующие условия:

— произведения чисел, стоящих в одной строке, одинаковы для всех строк;

— произведения чисел, стоящих в одном столбце, одинаковы для всех столбцов;

— среди чисел нет равных;

— все числа не больше 100?

б) То же самое, но таблица имеет размер  $9 \times 9$ , а числа должны быть не больше 1991.

*Н. Васильев*

Задача а) предлагалась в 8—9 классах, задача б) — в 10—11 классах.

12. Последовательность  $\{a_n\}$  определяется правилами:  $a_0 = 9$ ,  $a_{k+1} = 3a_k^4 + 4a_k^3$  для любого  $k$ . Докажите, что  $a_{10}$  содержит в десятичной записи более 1000 девяток.

*М. Вялый*

13. Квадрат  $9 \times 9$  разбит на 81 единичную клетку. Некоторые клетки закрашены, причем расстояние между центрами любых двух закрашенных клеток больше 2.

а) Приведите пример раскраски, при которой ровно 17 клеток закрашено.

б) Докажите, что больше 17 закрашенных клеток быть не может.

*С. Фомин*

14. Дан выпуклый восьмиугольник  $ABCDEFGH$ , у которого все внутренние углы равны между собой, а стороны равны через одну:

$$AB = CD = EF = GH, \quad BC = DE = FG = HA$$

(будем называть такой восьмиугольник полуправильным). Проводим диагонали  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$ ,  $DG$ ,  $EH$ ,  $FA$ ,  $GB$  и  $HC$ . Среди частей, на которые эти диагонали разбивают внутреннюю область восьмиугольника, рассмотрим ту, которая содержит центр восьмиугольника. Если эта часть — восьмиугольник, он снова является полуправильным (это очевидно); в этом случае в нем проводим аналогичные диагонали, и т.д. Если на каком-то шаге центральная фигура не является восьмиугольником, процесс заканчивается.

Докажите, что если этот процесс бесконечный, то исходный восьмиугольник — правильный.

*А. Толпыго*

Сравните с задачей IX.35.

15. Школьники ( $n$  человек) хотят разделить поровну  $m$  одинаковых шоколадок, при этом каждую шоколадку можно разломить не более одного раза.

а) При каких  $n$  это возможно, если  $m = 9$ ?

б) При каких  $n$  и  $m$  это возможно?

*Ю. Чеканов*

Сравните с задачей XI.37.

**10—11 классы**

16. Во вписанном четырехугольнике  $ABCD$  стороны  $BC$  и  $CD$  равны. Докажите, что площадь этого четырехугольника равна  $\frac{1}{2}AC^2 \sin A$ .

*Д.Фомин*

17. Можно ли разрезать плоскость на многоугольники, каждый из которых переходит в себя при повороте на  $360^\circ/7$  вокруг некоторой точки, и все стороны которых больше 1 см? (Многоугольник — это часть плоскости, ограниченная несамопересекающейся ломаной, не обязательно выпуклой.)

*А.Анджанс*

18. См. задачу 116).

19. См. задачу 12.

20. Пусть  $M$  — центр тяжести (точка пересечения медиан) треугольника  $ABC$ . При повороте на  $120^\circ$  вокруг точки  $M$  точка  $B$  переходит в точку  $P$ , при повороте на  $240^\circ$  вокруг точки  $M$  (в том же направлении) точка  $C$  переходит в точку  $Q$ . Докажите, что треугольник  $APQ$  — правильный (или же точки  $A$ ,  $P$ ,  $Q$  совпадают).

*И.Быковский*

21. Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.

а) Докажите, что число ее членов меньше 100.

б) Приведите пример такой прогрессии с 72 членами.

в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.

*В.Бугаенко, С.Токарев*

22. См. задачу 15.

**Весна, 1992 год****Базовый вариант****8—9 классы**

23. Первого числа некоторого месяца в магазине было 10 видов товаров по одинаковой цене за штуку. После этого каждый день каждый товар дорожает либо в 2 раза, либо в 3 раза. Первого числа следующего месяца все цены оказались различными.

Докажите, что отношение максимальной цены к минимальной больше 27.

*Д.Фомин, С.Смирнов*

**Замечание.** Условие задачи продиктовано экономическими реалиями начала 1990-х годов в странах СНГ.

24. В трапеции  $ABCD$  ( $AD$  — основание) диагональ  $AC$  равна сумме оснований, а угол между диагоналями равен  $60^\circ$ . Докажите, что трапеция — равнобедренная.

*С.Смирнов*

25. У нумизмата Феди все монеты имеют диаметр не больше 10 см. Он хранит их в плоской коробке размером  $30 \text{ см} \times 70 \text{ см}$  (в один слой). Ему подарили монету диаметром 25 см. Докажите, что все монеты можно уложить в одну плоскую коробку размером  $55 \text{ см} \times 55 \text{ см}$ .

*Ф.Назаров*

26. Окружность разбита на 7 дуг так, что сумма любых двух соседних дуг не превышает  $103^\circ$ . Назовите такое наибольшее число  $A$ , что при любом таком разбиении каждая из 7 дуг содержит не меньше  $A^\circ$ .

*А.Толпыго*

## 10—11 классы

27. См. задачу 23.

28. Стороны треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Биссектрисы внешних углов треугольника продолжены до пересечения с продолжениями сторон. Докажите, что одна из трех полученных точек лежит в середине отрезка, соединяющего две другие.

*В.Прасолов*

29. Из центра  $O$  правильного  $n$ -угольника  $A_1A_2 \dots A_n$  проведены  $n$  векторов в его вершины. Даны числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , причем  $a_1 > a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$ . Докажите, что линейная комбинация векторов:  $a_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + a_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + \dots + a_n \cdot \overrightarrow{OA_n}$  отлична от нулевого вектора.

*Д.Фомин, А.Кириченко*

30. По окружности вписано 10 чисел, их сумма равна 100. Дано, что сумма любой тройки чисел, стоящих подряд, не меньше 29. Укажите такое наименьшее число  $A$ , что в любом таком

наборе чисел каждое из чисел не превышает  $A$  (и докажите, что оно действительно наименьшее).

*А. Толпыго*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

**31.**  $n$  чисел ( $n > 1$ ) называются близкими, если каждое из них меньше, чем сумма всех чисел, деленная на  $n - 1$ . Пусть  $a, b, c, \dots$  —  $n$  близких чисел,  $S$  — их сумма. Докажите, что

а) все они положительны;

б) всегда  $a + b > c$ ;

в) всегда  $a + b \geq S/(n - 1)$ .

*Р. Шлейфер*

**32.** Пусть в прямоугольном треугольнике  $AB$  и  $AC$  — катеты,  $AC > AB$ . На  $AC$  выбрана точка  $E$ , а на  $BC$  — точка  $D$  так, что  $AB = AE = BD$ . Докажите, что треугольник  $ADE$  будет прямоугольным в том и только в том случае, если стороны треугольника  $ABC$  относятся как  $3:4:5$ .

*А. Паровян*

**33.** Пусть  $m, n$  и  $k$  — натуральные числа, причем  $m > n$ . Какое из двух чисел больше:

$$\sqrt{m + \sqrt{n + \sqrt{m \dots}}} \quad \text{или} \quad \sqrt{n + \sqrt{m + \sqrt{n \dots}}}$$

(В каждом выражении  $k$  знаков квадратного корня,  $m$  и  $n$  чередуются.)

*Л. Курляндчик*

**34.** Точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Построим треугольник  $A_1B_1C_1$ , стороны которого параллельны отрезкам  $PA, PB, PC$  ( $B_1C_1 \parallel PA, C_1A_1 \parallel PB, A_1B_1 \parallel PC$ ). Через точки  $A_1, B_1, C_1$  проведены прямые, параллельные соответственно  $BC, CA$  и  $AB$ . Докажите, что эти прямые пересекаются в точке, лежащей на описанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$ .

*В. Прасолов*

**35.** Имеется 50 серебряных монет, упорядоченных по весу, и 51 золотая монета, также упорядоченные по весу. Известно, что все монеты различны по весу. В нашем распоряжении — двухчашечные весы, позволяющие по каждые две монеты установить,

какая тяжелее. Как за 7 взвешиваний найти монету, занимающую среди всех монет 51-е место?

*А.Анджанс*

**36.** Круг разбит на  $n$  секторов, в некоторых секторах стоят фишки — всего фишек  $n + 1$ . Затем позиция подвергается преобразованиям. Один шаг преобразования состоит в следующем: берутся какие-нибудь две фишки, стоящие в одном секторе, и переставляются в разные стороны в соседние секторы. Докажите, что через некоторое число шагов не менее половины секторов будет занято.

*Д.Фомин*

Сравните с задачей V.28.

### 10—11 классы

**37.** Докажите, что произведение всех целых чисел от  $2^{1917} + 1$  до  $2^{1991} - 1$  включительно не есть квадрат целого числа.

*В.Сендеров*

**38.** Внутри окружности радиуса 1 расположена замкнутая ломаная (самопересекающаяся), содержащая 51 звено, причем известно, что длина каждого звена равна  $\sqrt{3}$ . Для каждого угла этой ломаной рассмотрим треугольник, двумя сторонами которого служат звенья ломаной, образующие этот угол (таких треугольников всего 51). Докажите, что сумма площадей этих треугольников не меньше, чем утроенная площадь правильного треугольника, вписанного в окружность.

*А.Берзиньш*

**39.** Дана таблица  $n \times n$ , заполненная числами по следующему правилу: в клетке, стоящей в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце таблицы, записано число  $(i + j - 1)^{-1}$ . В таблице зачеркнули  $n$  чисел таким образом, что никакие два зачеркнутых числа не находятся в одном столбце или в одной строке. Докажите, что сумма зачеркнутых чисел не меньше 1.

*С.Иванов*

**40.** Даны три треугольника:  $A_1A_2A_3$ ,  $B_1B_2B_3$ ,  $C_1C_2C_3$ . Известно, что их центры тяжести (точки пересечения медиан) лежат на одной прямой, а никакие три точки из числа 9 вершин этих треугольников не лежат на одной прямой. Рассматриваются 27 треугольников вида  $A_iB_jC_k$ , где  $i, j, k$  независимо пробегают значения 1, 2, 3.



Докажите, что эти 27 треугольников можно разбить на две группы так, что сумма площадей треугольников первой группы будет равна сумме площадей треугольников второй группы.

*А.Анджанс*

41. Имеется 100 серебряных монет, упорядоченных по весу, и 101 золотая монета, также упорядоченные по весу. Известно, что все монеты различны по весу. В нашем распоряжении — двухчашечные весы, позволяющие про каждые две монеты установить, какая тяжелее. Как за наименьшее число взвешиваний найти монету, занимающую среди всех монет 101-е место? Укажите это число и докажите, что меньшим числом взвешиваний обойтись нельзя.

*А.Анджанс*

Сравните с задачей XII.34.

42. Пусть  $n$  и  $b$  — натуральные числа. Через  $V(n, b)$  обозначим число разложений  $n$  на сомножители, каждый из которых больше  $b$  (например:  $36 = 6 \cdot 6 = 4 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 3 \cdot 12$ , так что  $V(36, 2) = 5$ ). Докажите, что  $V(n, b) < n/b$ .

Примечание. Разложение в один сомножитель (например,  $36 = 36$ ) тоже считается разложением.

*Н.Васильев*

# **XIV Турнир городов (1992/93)**

**Осень, 1992 год**

**Базовый вариант**

## **8—9 классы**

1. На плоскости дана 101 точка, не все они лежат на одной прямой, через каждые две точки проведена прямая. Докажите, что через некоторую точку проходит не менее 11 прямых.

*А.Анджанс*

2. На каждой стороне параллелограмма выбрано по точке. Точки, лежащие на соседних сторонах, соединены. Докажите, что центры описанных окружностей четырех получившихся треугольников — вершины параллелограмма.

*Е.Куланин*

3. Дано натуральное число  $M$ . Докажите, что существует число, кратное  $M$ , сумма цифр которого в десятичной записи нечетна.

*Д.Фомин*

4. а) В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  больше угла  $B$ . Докажите, что длина стороны  $BC$  больше половины длины стороны  $AB$ .

б) В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  угол  $A$  больше угла  $C$ , а угол  $D$  больше угла  $B$ . Докажите, что длина стороны  $BC$  больше половины длины стороны  $AD$ .

*Ф.Назаров*

## **10—11 классы**

5. Дан куб с ребром длины  $n$  см. В нашем распоряжении имеется длинный кусок изоляционной ленты шириной 1 см. Требуется обклеить куб лентой, при этом лента может свободно переходить через ребро на другую грань, по грани она должна идти по прямой, параллельной ребру, и не свисать с грани вбок. На сколько кусков необходимо разрезать ленту, чтобы обклеить куб?

*А.Спивак*

6. Рассматривается последовательность квадратов на плоскости. Они расположены «спиралью», а именно: первые два квадрата со стороной 1 расположены рядом (второй правее) и имеют одну общую вертикальную сторону. Нижняя сторона третьего квадрата

со стороной 2 содержит верхние стороны первых двух квадратов. Правая сторона четвертого квадрата со стороной 3 содержит левые стороны первого и третьего квадратов. Верхняя сторона пятого квадрата со стороной 5 содержит нижние стороны первого, второго и четвертого квадратов. Далее двигаемся по спирали бесконечно, обходя рассмотренные квадраты против часовой стрелки так, что сторона нового квадрата составлена из сторон трех ранее рассмотренных. Докажите, что центры всех этих квадратов принадлежат двум прямым.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 4 | 3 |   |
|   | 1 | 2 |
| 5 |   |   |

*А.Анджанс*

7. Функция  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  равна максимуму из нескольких функций вида  $y = C \cdot 10^{-|x-d|}$  (с различными  $d$  и  $C$ , причем все  $C$  положительны). Дано, что  $f(a) = f(b)$ . Докажите, что сумма длин промежутков, на которых функция возрастает, равна сумме длин промежутков, на которых функция убывает.

*Н.Васильев*

8. См. задачу 4.

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

9. В таблице  $n \times n$  разрешается добавить ко всем числам любого несамопересекающегося замкнутого маршрута ладьи по 1. В первоначальной таблице по диагонали стояли единицы, а остальные числа были нули. Можно ли с помощью нескольких разрешенных преобразований добиться того, чтобы все числа в таблице стали равны? (Считается, что ладья побывала во всех клетках таблицы, через которые проходит ее путь.)

*А.Егоров*

10. В квадрат вписано 1993 различных правильных треугольника (треугольник вписан, если три его вершины лежат на сторонах квадрата). Докажите, что внутри квадрата можно указать точку, лежащую на границе не менее чем 499 из этих треугольников.

*Н.Седракян*

11. Можно ли подобрать такие два многочлена  $P(x)$  и  $Q(x)$  с целыми коэффициентами, что  $P - Q$ ,  $P$  и  $P + Q$  — квадраты некоторых многочленов (причем  $Q$  не получается умножением  $P$  на число)?

*В.Прасолов*

**12. В четырехугольнике  $ABCD$** 

$$AB = BC = CD = 1, \quad AD \neq 1.$$

Положение точек  $B$  и  $C$  фиксировано, точки же  $A$  и  $D$  подвергаются преобразованиям, сохраняющим длины отрезков  $AB$ ,  $CD$  и  $AD$ . Новое положение точки  $A$  получается из старого зеркальным отражением в отрезке  $BD$ , новое положение точки  $D$  получается из старого зеркальным отражением в отрезке  $AC$  (где  $A$  уже новое), затем на втором шаге опять  $A$  отражается относительно  $BD$  ( $D$  уже новое), затем снова преобразуется  $D$ , затем аналогично проводится третий шаг, и так далее.

Докажите, что на каком-то шаге положение точек совпадает с первоначальным.

*М. Концевич*

Сравните с задачей XXIII.21.

**13.** Даны угол с вершиной  $O$  и точка  $A$  внутри него. Рассмотрим такие точки  $M$ ,  $N$  на разных сторонах данного угла, что углы  $MAO$  и  $OAN$  равны. Докажите, что все прямые  $MN$  проходят через одну точку (или параллельны).

*С. Токарев*

**14.** Числовая последовательность определяется условиями:

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = a_n + [\sqrt{a_n}]$$

(через  $[x]$  обозначается наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Докажите, что среди членов этой последовательности бесконечно много полных квадратов.

*А. Анджанс*

**10—11 классы**

**15.** Докажите, что существует такой набор из 100 различных натуральных чисел  $c_1, c_2, \dots, c_{100}$ , что для любых двух соседних чисел  $c_i$  и  $c_{i+1}$  этого набора сумма  $c_i^2 + c_{i+1}^2$  есть квадрат целого числа.

*С. Токарев*

**16.** Куб с ребром  $n$  таким образом составлен из кубиков с ребром 1, некоторые из которых белые, а остальные — черные, что каждый белый кубик имеет общую грань с тремя черными, а каждый черный — с тремя белыми. При каких  $n$  это возможно?

*С. Токарев*

17. Числовая последовательность определяется условиями:

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = a_n + [\sqrt{a_n}]$$

(через  $[x]$  обозначается наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Сколько полных квадратов встречается среди первых членов этой последовательности, не превосходящих 1 000 000?

*А.Анджанс*

18. В таблице  $m$  строк,  $n$  столбцов. «Горизонтальным ходом» называется такая перестановка элементов таблицы, при которой каждый элемент остается в той строке, в которой он был и до перестановки; аналогично определяется «вертикальный ход» («строка» в предыдущем определении заменяется на «столбец»).

Укажите такое  $k$ , что за  $k$  ходов (любых) можно получить любую перестановку элементов таблицы, но существует такая перестановка, которую нельзя получить за меньшее число ходов.

*А.Анджанс*

19. Биссектриса угла  $A$  треугольника  $ABC$  пересекает описанную окружность в точке  $D$ . Пусть  $P$  — точка, симметричная центру вписанной окружности треугольника  $ABC$  относительно середины стороны  $BC$ ,  $M$  — вторая точка пересечения прямой  $DP$  с описанной окружностью. Докажите, что расстояние от точки  $M$  до одной из вершин  $A, B, C$  равно сумме расстояний от  $M$  до двух других вершин.

*В.Гордон*

20. Число ребер многогранника равно 100.

а) Какое наибольшее число ребер может пересечь плоскость, не проходящая через его вершины, если многогранник выпуклый?

Докажите, что для невыпуклого многогранника это число

б) может равняться 96,

в) но не может равняться 100.

*А.Анджанс*

## Весна, 1993 год

### Базовый вариант

#### 8—9 классы

21. Сторона  $AB$  треугольника  $ABC$  имеет длину  $s$ . На стороне  $AB$  взята такая точка  $M$ , что  $\angle CMA = \varphi$ . Найдите расстояние

между ортоцентрами (точками пересечения высот) треугольников  $AMC$  и  $BMC$ .

*И. Шарыгин*

22. Имеется два дома, в каждом по два подъезда. Жильцы держат кошек и собак, причем доля кошек (отношение числа кошек к общему числу кошек и собак) в первом подъезде первого дома больше, чем доля кошек в первом подъезде второго дома, а доля кошек во втором подъезде первого дома больше, чем доля кошек во втором подъезде второго дома. Верно ли, что доля кошек в первом доме больше доли кошек во втором доме?

*А. Ковальджи*

23. Пусть  $a, b, c$  — натуральные числа,

$$\text{НОД}(a, b, c) = 1 \quad \text{и} \quad \frac{ab}{a-b} = c.$$

Докажите, что  $a - b$  — точный квадрат.

*С. Берлов*

24. Муравей ползает по проволочному каркасу куба, при этом он никогда не поворачивает назад. Может ли случиться, что в одной вершине он побывал 25 раз, а в каждой из остальных — по 20 раз?

*С. Токарев*

## 10—11 классы

25. Найдите все такие числа вида  $2^n$ , что при приписывании к ним одной цифры слева можно снова получить степень двойки.

*А. Перлин*

**Замечание.** Фактически на Турнире городов была дана задача в другой формулировке: «Найдите все такие числа вида  $2^n$  ( $n$  натурально), что при вычеркивании первой цифры их десятичной записи снова получится степень двойки». Ответ при этом не меняется, но задача получается ощутимо сложнее.

26. Четырехугольник  $ABCD$  — вписанный. Пусть  $M$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ ,  $N$  — точка пересечения  $BC$  и  $AD$ . Известно, что  $BM = DN$ . Докажите, что  $CM = CN$ .

*Ф. Назаров*

27. Рассматривается числовой треугольник:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & \dots\dots\dots \frac{1}{1993} \\
 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{12} & \dots\dots\dots \frac{1}{1992 \cdot 1993} \\
 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{12} & & \dots\dots\dots \\
 & & & & & & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

(первая строчка задана, а каждый элемент остальных строчек вычисляется как разность двух элементов, которые стоят над ним). В 1993-й строчке стоит один элемент. Найдите его.

*Г. В. Лейбниц*

28. Есть три кучи камней. Разрешается к любой из них добавить столько камней, сколько есть в двух других кучах, или из любой кучи выбросить столько камней, сколько есть в двух других кучах. Например:  $(12, 3, 5) \rightarrow (12, 20, 5)$  (или  $\rightarrow (4, 3, 5)$ ).

Можно ли, начав с куч 1993, 199 и 18, сделать одну из куч пустой?

*М. Гусаров*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

29. Мудрецу С. сообщили сумму трех натуральных чисел, а мудрецу П. — их произведение.

— Если бы я знал — сказал С., — что твое число больше, чем мое, я бы сразу назвал три искомых числа.

— Мое число меньше, чем твое, — ответил П., а искомые числа ..., ... и ...

Какие числа назвал П.?

*Л. Борисов*

30. Точка  $O$  — центр окружности, касающейся стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  и продолжений сторон  $BA$  и  $BC$ ,  $D$  — центр окружности, проходящей через точки  $B$ ,  $A$  и  $O$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  лежат на одной окружности.

*И. Акулич*

31. Задано правило, которое каждой паре чисел  $x, y$  ставит в соответствие некоторое число  $x * y$ , причем для любых  $x, y, z$  выполняются тождества:

1)  $x * x = 0$ , 2)  $x * (y * z) = (x * y) + z$ .

Найдите  $1993 * 1932$ .

*Г. Гальперин*

**32.** Петя заметил, что у всех его 25 одноклассников различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети? (Укажите все решения.)

*С. Токарев*

**33.** Из бумаги вырезан треугольник с углами  $20^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $140^\circ$ . Он разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника. Затем один из образовавшихся треугольников также разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника, и так далее.

Докажите, что ни на каком шаге нельзя получить треугольник, подобный исходному.

*А. Галочкин*

**34.** См. задачу 41.

**35.** На отрезке  $[a, b]$  отмечено несколько синих и красных точек. Две точки одного цвета, между которыми нет отмеченных точек, разрешается стереть. Разрешается также так отметить две точки одного цвета, красные или синие, чтобы между ними не было других отмеченных точек. Первоначально было отмечено две точки:  $a$  — синяя и  $b$  — красная. Можно ли сделать несколько разрешенных преобразований так, чтобы в результате было опять две отмеченные точки:  $a$  — красная и  $b$  — синяя?

*А. Канель-Белов*

## 10—11 классы

**36.** Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько не налегающих друг на друга квадратов со сторонами, параллельными сторонам большого квадрата (маленькие квадраты не обязательно равны друг другу). Рассмотрим те квадраты, которые пересекаются с диагональю большого квадрата. Может ли оказаться, что сумма их периметров больше 1993?

*А. Канель-Белов, А. Колмогоров*

**37.** На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  внешним образом построен квадрат с центром в точке  $O$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $BC$  и  $AC$ , а длины этих сторон равны соответственно  $a$  и  $b$ . Найдите наибольшее возможное значение суммы  $OM + ON$  (когда угол  $C$  меняется).

*И. Шарыгин*



**38.** Несколько человек делят наследство. Наследник считается бедным, если ему досталось меньше 99 рублей, богатым — если ему досталось больше 10 000 рублей. Величина наследства и число людей таковы, что при любом способе дележа у богатых окажется больше денег, чем у бедных. Докажите, что при любом способе дележа у богатых не меньше чем в 100 раз больше денег, чем у бедных.

*Ф. Назаров*

**39.** На доску последовательно записываются натуральные числа. На  $n$ -м шаге (когда написаны числа  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ) пишется любое число, которое нельзя представить в виде суммы

$$a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_{n-1} k_{n-1},$$

где  $k_i$  — целые неотрицательные числа (на  $a_1$  никаких ограничений не накладывается). Докажите, что процесс написания чисел не может быть бесконечным.

*А. Канель-Белов*

**40.** Существует ли кусочно-линейная функция  $f$ , определенная на отрезке  $[-1, 1]$ , для которой  $f(f(x)) = -x$  при всех  $x$ ? (Функция называется кусочно-линейной, если ее график есть объединение конечного числа точек и интервалов прямой; она может быть разрывной.)

*А. Канель-Белов*

**41.** Ширина реки один километр. Это по определению означает, что от любой точки каждого берега можно доплыть до противоположного берега, проплыв не больше километра. Может ли лодка проплыть по реке так, чтобы в любой момент расстояние до любого из берегов было бы не больше: а) 700 м? б) 800 м?

(Берега состоят из отрезков и дуг окружностей.)

*Г. Кондаков*

**42.** В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Растения считаются «непохожими», если они различаются не менее чем по 51 признаку.

а) Покажите, что в справочнике не может находиться больше 50 парно непохожих растений.

б) А может ли быть 50?

*Д. Терешин, М. Вялый*

# XV Турнир городов (1993/94)

Осень, 1993 год

Базовый вариант

## 8—9 классы

1. На сторонах шестиугольника было записано шесть чисел, а в каждой вершине — число, равное сумме двух чисел на смежных с ней сторонах. Затем все числа на сторонах и одно число в вершине стерли. Можно ли восстановить число, стоявшее в вершине?

*Фольклор*

2. Вершины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  треугольника соединены с точками  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , лежащими на противоположных сторонах (не в вершинах). Могут ли середины отрезков  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежать на одной прямой?

*Фольклор*

3. Первоначально на доске написано натуральное число  $A$ . Разрешается прибавить к нему один из его делителей, отличных от него самого и единицы. С полученным числом разрешается проделать аналогичную операцию, и т. д. Докажите, что из числа  $A = 4$  можно с помощью таких операций прийти к любому наперед заданному составному числу.

*М. Вялый*

4. Три шахматиста  $A$ ,  $B$  и  $C$  сыграли матч-турнир (каждый с каждым сыграл одинаковое число партий). Может ли случиться, что по числу очков  $A$  занял первое место,  $C$  — последнее, а по числу побед — наоборот:  $A$  занял последнее место,  $C$  — первое (за победу присуждается одно очко, за ничью — пол-очка)?

*А. Рубин*

Сравните с задачей XIX.21.

## 10—11 классы

5. Конечно или бесконечно число натуральных решений уравнения  $x^2 + y^3 = z^2$ ?

*Фольклор*

6. На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  взяты такие точки  $M$  и  $N$ , что  $BC = BM$  и  $AC = AN$ . Докажите, что  $\angle MCN = 45^\circ$ .

*Фольклор*

7. Числа 1, 2, 3, ..., 25 расставляют в таблицу  $5 \times 5$  так, чтобы в каждой строке числа были расположены в порядке возрастания. Какое наибольшее и какое наименьшее значение может иметь сумма чисел в третьем столбце?

*Фольклор*

8. Петя хочет изготовить необычную игральную кость, которая, как обычно, должна иметь форму куба, на гранях которого нарисованы точки (на разных гранях разное число точек), но при этом на любых двух соседних гранях число точек должно различаться по крайней мере на два (при этом разрешается, чтобы на некоторых гранях оказалось больше шести точек). Сколько точек необходимо для этого нарисовать?

*Фольклор*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

9. В строчку выписано 10 целых чисел. Вторая строчка находится так: под каждым числом  $A$  первой строчки пишется число, равное количеству чисел первой строчки, которые больше  $A$  и при этом стоят правее  $A$ . По второй строчке аналогично строится третья строчка, и т. д.

а) Докажите, что все строчки, начиная с некоторой — нулевые (состоят из сплошных нулей).

б) Каково максимально возможное число ненулевых строчек?

*С. Токарев*

10. Внутри квадрата  $ABCD$  лежит квадрат  $PQRS$ . Отрезки  $AP$ ,  $BQ$ ,  $CR$  и  $DS$  не пересекают друг друга и квадрата  $PQRS$ . Докажите, что сумма площадей четырехугольников  $ABQP$  и  $CDSR$  равна сумме площадей четырехугольников  $BCRQ$  и  $DAPS$ .

*Фольклор*

11. Дан невыпуклый несамопересекающийся четырехугольник, который имеет три внутренних угла по  $45^\circ$ . Докажите, что середины его сторон лежат в вершинах квадрата.

*В. Произволов*

12. В каждой клетке квадрата  $8 \times 8$  клеток проведена одна из диагоналей. Рассмотрим объединение этих 64 диагоналей. Оно состоит из нескольких связных частей (к одной части относятся

точки, между которыми можно пройти по одной или нескольким диагоналям). Может ли количество этих частей быть

- а) больше 15? б) больше 20?

*Н. Васильев*

Сравните с задачей XXI.5.

13. Через  $S(n)$  обозначим сумму цифр числа  $n$  (в десятичной записи). Существуют ли три таких различных натуральных числа  $m$ ,  $n$  и  $p$ , что  $m + S(m) = n + S(n) = p + S(p)$ ?

*М. Гервер*

14. Требуется сделать набор гирек, каждая из которых весит целое число граммов, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 грамма до 55 граммов включительно даже в том случае, если некоторые гирьки потеряны (гирьки кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую). Рассмотрите два варианта задачи:

а) необходимо подобрать 10 гирек, из которых может быть потеряна любая одна;

б) необходимо подобрать 12 гирек, из которых могут быть потеряны любые две.

*Д. Звонкин*

## 10—11 классы

15. В угол вписана окружность;  $A$  и  $B$  — точки касания,  $C$  — вершина. Докажите, что если отрезок расположен внутри невыпуклого криволинейного треугольника  $ABC$ , где  $AB$  — дуга окружности, то его длина меньше длины отрезка  $CA$ .

*Фольклор*

16. Десятичные записи натуральных чисел выписаны подряд, начиная с единицы, до некоторого  $n$  включительно:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ...  $n$ .

Существует ли такое  $n$ , что в этой записи все десять цифр встречаются одинаковое количество раз?

*А. Анджанс*

17. Рассматривается шестиугольник, являющийся пересечением двух (не обязательно равных) правильных треугольников. Докажите, что если параллельно перенести один из треугольни-

ков, то периметр пересечения (если оно остается шестиугольником), не меняется.

*В. Произволов*

**18.** Выпуклый 1993-угольник разрезан на выпуклые семиугольники. Докажите, что найдутся четыре соседние вершины 1993-угольника, принадлежащие одному семиугольнику. (Вершина семиугольника не может лежать внутри стороны 1993-угольника.)

*А. Канель-Белов*

**19.** В вершинах квадрата сидят четыре кузнечика. Они прыгают в произвольном порядке, но не одновременно. Каждый кузнечик прыгает в такую точку, которая симметрична точке, в которой он находился до прыжка, относительно центра тяжести трех других кузнечиков. Может ли в какой-то момент один кузнечик приземлиться на другого? (Кузнечики точечные.)

*А. Егоров*

Сравните с задачами XVI.24, XVI.28.

**20.** Известно, что уравнение  $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$  имеет действительный корень. Докажите неравенство:  $a^2 + b^2 \geq 8$ .

*А. Егоров*

## Весна, 1994 год

### Базовый вариант

#### 8—9 классы

**21.** Постройте выпуклый четырехугольник, зная длины всех сторон и отрезка  $KL$ , соединяющего середины диагоналей.

*Фольклор*

**22.** На кружок пришло 60 учеников. Оказалось, что среди любых 10 учеников есть не меньше трех одноклассников. Докажите, что среди кружковцев найдется по меньшей мере 15 учеников, которые учатся в одном классе.

*Фольклор*

**23.** Из точки  $O$ , лежащей внутри выпуклого  $n$ -угольника  $A_1A_2A_3 \dots A_n$ , проведены отрезки  $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$  ко всем вершинам. Оказалось, что все углы между этими отрезками и при-

легающими к ним сторонами  $n$ -угольника — острые, причем

$$\begin{aligned}\angle OA_1A_n &\leq \angle OA_1A_2, \\ \angle OA_2A_1 &\leq \angle OA_2A_3, \quad \dots, \quad \angle OA_{n-1}A_{n-2} \leq \angle OA_{n-1}A_n, \\ \angle OA_nA_{n-1} &\leq \angle OA_nA_1.\end{aligned}$$

Докажите, что  $O$  — центр окружности, вписанной в  $n$ -угольник.

*В.Произволов*

**24.** 10 фишек стоят на столе по кругу. Сверху фишки красные, снизу — синие. Разрешены две операции: а) перевернуть четыре фишки, стоящие подряд; б) перевернуть четыре фишки, расположенные так:  $xx0xx$  ( $x$  — фишка, входящая в четверку,  $0$  — не входящая). Удастся ли, используя несколько раз разрешенные операции, перевернуть все фишки синей стороной вверх?

*А.Толпыго*

## 10—11 классы

**25.** Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Точка  $A_1$  диаметрально противоположна точке  $A$ , точка  $A_0$  — середина отрезка  $BC$ , точка  $A_2$  симметрична точке  $A_1$  относительно точки  $A_0$ . Точки  $B_2$  и  $C_2$  определяются аналогично, исходя из точек  $B$  и  $C$ . Докажите, что точки  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  совпадают.

*А.Ягубьянц*

**26.** Последовательность натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  такова, что для всякого  $n$  уравнение  $a_{n+2}x^2 + a_{n+1}x + a_n = 0$  имеет действительный корень. Может ли число членов этой последовательности быть

- а) равным 10;
- б) бесконечным?

*А.Шаповалов*

**27.** Имеется шоколадка с пятью продольными и восемью поперечными углублениями, по которым ее можно ломать (всего получается  $9 \cdot 6 = 54$  дольки). Играют двое, ходят по очереди. Играющий за свой ход отламывает от шоколадки полоску шириной 1 и съедает ее. Другой играющий за свой ход делает то же самое с оставшейся частью, и т.д. Тот, кто разламывает полоску шириной 2 на две полоски шириной 1, съедает одну из них, а другую съедает его партнер. Докажите, что начинающий игру может действовать таким образом, что ему достанется по крайней

мере на 6 долек больше, чем второму (при любых действиях второго).

*Р. Фёдоров*

28. См. задачу 24.

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

29. Ученик не заметил знака умножения между двумя трехзначными числами  $x$  и  $y$  и написал одно шестизначное число. Результат получился в три раза больше. Найдите  $x$  и  $y$ .

*А. Ковальджи*

Сравните с задачей X.35.

30. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . В точке  $A$  к обеим проведены касательные, пересекающие окружности в точках  $M$  и  $N$ . Прямые  $BM$  и  $BN$  пересекают окружности еще раз в точках  $P$  и  $Q$  ( $P$  лежит на прямой  $BM$ ,  $Q$  — на прямой  $BN$ ). Докажите, что отрезки  $MP$  и  $NQ$  равны.

*И. Нагель*

31. Каждый из 450 депутатов парламента дал пощечину ровно одному своему коллеге. Докажите, что можно избрать парламентскую комиссию из 150 человек, среди членов которой никто никого не бил.

*М. Вялый*

Сравните с задачей XIII.23.

32. В таблице

|       |   |   |   |     |   |
|-------|---|---|---|-----|---|
| 0     | 1 | 2 | 3 | ... | 9 |
| 9     | 0 | 1 | 2 | ... | 8 |
| 8     | 9 | 0 | 1 | ... | 7 |
| ..... |   |   |   |     |   |
| 1     | 2 | 3 | 4 | ... | 0 |

отмечено 10 элементов так, что в каждой строке и каждом столбце отмечен один элемент. Докажите, что среди отмеченных элементов есть хотя бы два равных.

*А. Савин*

**33.** Существует ли такой выпуклый пятиугольник, от которого некоторая прямая отрезает подобный ему пятиугольник?

*С. Токарев*

**34.** В каждой целой точке числовой оси расположена лампочка с кнопкой, при нажатии которой лампочка меняет состояние — загорается или гаснет. Вначале все лампочки погашены. Задано конечное множество целых чисел — шаблон  $S$ . Его можно перемещать вдоль числовой оси как жесткую фигуру и, приложив в любом месте, поменять состояние множества всех лампочек, закрытых шаблоном. Докажите, что при любом  $S$  за несколько операций можно добиться того, что будут гореть ровно две лампочки.

*Б. Гинзбург*

**35.** В квадрате клетчатой бумаги  $10 \times 10$  вам нужно расставить корабли:  $1 \times 4$  — один корабль,  $1 \times 3$  — два,  $1 \times 2$  — три и  $1 \times 1$  — четыре корабля. Корабли не должны иметь общих точек (даже вершин) друг с другом, но могут прилегать к границам квадрата. Докажите, что

а) если расставлять их в указанном выше порядке (начиная с больших), то этот процесс всегда удастся довести до конца, даже если вы в каждый момент заботитесь только об очередном корабле, не думая о будущих;

б) если расставлять их в обратном порядке (начиная с малых), то может возникнуть ситуация, когда очередной корабль поставить нельзя (приведите пример).

*К. Игнатьев*

## 10—11 классы

**36.** Существует ли бесконечное число троек таких целых чисел  $x, y, z$ , что  $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$ ?

*Н. Васильев*

**37.** Пусть  $\{a_n\}$  — последовательность чисел между 0 и 1, в которой следом за  $x$  идет  $1 - |1 - 2x|$ .

а) Докажите, что если  $a_1$  рациональное, то последовательность начиная с некоторого места периодическая.

б) Докажите, что если последовательность начиная с некоторого места периодическая, то  $a_1$  — рациональное.

*Г. Шабат*



38. У многочлена  $P(x)$  есть отрицательный коэффициент. Могут ли у всех его степеней  $P^n(x)$ ,  $n > 1$ , все коэффициенты быть положительными?

*О. Крижановский*

39. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ . В треугольники  $ABD$  и  $ACD$  вписаны окружности и к ним проведена общая внешняя касательная (отличная от  $BC$ ), пересекающая  $AD$  в точке  $K$ . Докажите, что длина отрезка  $AK$  не зависит от выбора точки  $D$ .

*И. Шарыгин*

40. Найдите наибольшее натуральное число, десятичная запись которого не заканчивается нулями, которое при вычеркивании одной (не первой) цифры уменьшается в целое число раз.

*А. Галочкин*

41. Рассматривается выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Пары его противоположных сторон продолжены до пересечения:  $AB$  и  $CD$  — в точке  $P$ ,  $CB$  и  $DA$  — в точке  $Q$ . Пусть  $l_A$ ,  $l_B$ ,  $l_C$  и  $l_D$  — биссектрисы внешних углов четырехугольника при вершинах  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  соответственно. Пусть  $l_P$  и  $l_Q$  — внешние биссектрисы углов  $APD$  и  $AQB$  соответственно (т.е. биссектрисы углов, дополняющих эти углы до развернутого). Обозначим через  $M_{AC}$  точку пересечения  $l_A$  и  $l_C$ , через  $M_{BD}$  —  $l_B$  и  $l_D$ , через  $M_{PQ}$  —  $l_P$  и  $l_Q$ .

Докажите, что если все три точки  $M_{AC}$ ,  $M_{BD}$  и  $M_{PQ}$  существуют, то они лежат на одной прямой.

*С. Маркелов*

42. Рассматривается произвольный многоугольник (возможно, невыпуклый).

а) Всегда ли найдется хорда этого многоугольника, которая делит его площадь пополам?

б) Докажите, что найдется такая хорда, что площадь каждой из частей, на которые она разбивает многоугольник, не меньше, чем  $1/3$  площади всего многоугольника.

в) Можно ли в пункте б) заменить число  $1/3$  на большее?

(Хордой многоугольника называется отрезок, концы которого принадлежат контуру многоугольника, а сам он целиком принадлежит многоугольнику, включая контур.)

*В. Произволов*

# **XVI Турнир городов (1994/95)**

**Осень, 1994 год**

**Базовый вариант**

## **8—9 классы**

1. Во время бала каждый юноша танцевал вальс с девушкой либо более красивой, чем на предыдущем танце, либо более умной, а один — с девушкой одновременно более красивой и более умной. Могло ли такое быть? (Юношей и девушек на балу было поровну.)

*А. Канель-Белов*

2. На плоскости даны две окружности одна внутри другой. Постройте такую точку  $O$ , что одна окружность получается из другой гомотетией относительно точки  $O$  (другими словами: чтобы растяжение плоскости от точки  $O$  с некоторым коэффициентом переводило одну окружность в другую).

*Фольклор*

3. Найдите какие-нибудь пять натуральных чисел, разность любых двух из которых равна наибольшему общему делителю этой пары чисел.

*С. Токарев*

4. В Простоквашинской начальной школе учится всего 20 детей. У любых двух из них есть общий дед. Докажите, что у одного из дедов в этой школе учится не менее 14 внуков и внучек.

*А. Шаповалов*

## **10—11 классы**

5. Во время бала каждый юноша танцевал вальс с девушкой либо более красивой, чем на предыдущем танце, либо более умной, но большинство (не меньше 80 процентов) — с девушкой одновременно более красивой и более умной. Могло ли такое быть? (Юношей и девушек на балу было поровну.)

*А. Канель-Белов*

6. Докажите, что из шести ребер тетраэдра можно сложить два треугольника.

*В. Произволов*

7. Пусть  $a, b, c, d$  — такие вещественные числа, что

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a + b + c + d = 0.$$

Докажите, что сумма каких-то двух из этих чисел равна нулю.

*Л. Курляндчик*

8. Полоска  $1 \times 10$  разбита на единичные квадраты. В квадраты записывают числа  $1, 2, \dots, 10$ . Сначала в один какой-нибудь квадрат пишут число 1, затем число 2 записывают в один из соседних квадратов, затем число 3 — в один из соседних с уже занятыми и т. д. (произвольными являются выбор первого квадрата и выбор соседа на каждом шагу). Сколькими способами это можно проделать?

*А. Шень*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

9. В ящиках лежат орехи. Известно, что в среднем в каждом ящике 10 орехов, а среднее арифметическое квадратов чисел орехов в ящиках меньше 1000. Докажите, что по крайней мере 10 % ящиков не пустые.

*А. Канель-Белов*

10. На плоскости дан квадрат  $8 \times 8$ , разбитый на клеточки  $1 \times 1$ . Его покрывают прямоугольными равнобедренными треугольниками (два треугольника закрывают одну клетку). Имеется 64 черных и 64 белых треугольника. Рассматриваются такие «правильные» покрытия, что любые два треугольника, имеющие общую сторону, разного цвета. Сколько существует правильных покрытий?

*Н. Васильев*

11. Взаимно перпендикулярные прямые  $l$  и  $m$  пересекаются в точке  $P$  окружности так, что они разбивают окружность на три дуги  $PA, AB, BP$ . Отметим на каждой дуге такие точки  $R, S, T$  соответственно, что проведенная через точку касательная к окружности пересекается с прямыми  $l$  и  $m$  в точках, равноотстоящих от точки касания.

Докажите, что  $R, S, T$  — вершины равностороннего треугольника.

*Е. Пржевальский*

12. Можно ли из последовательности 1,  $1/2$ ,  $1/3$ , ... выбрать (сохраняя порядок)

а) сто чисел,

б) бесконечную подпоследовательность чисел,

из которых каждое, начиная с третьего, равно разности двух предыдущих ( $a_k = a_{k-2} - a_{k-1}$ )?

*С. Токарев*

Сравните с задачей III.5.

13. См. задачу 20 для  $m = 7$ ,  $n = 13$ .

14. Сумма шестых степеней шести целых чисел  $S$  на единицу больше, чем их ушестеренное произведение  $P$ . Докажите, что одно из чисел равно единице или минус единице, а остальные — нули.

*Л. Курляндчик*

15. Фигура  $\Phi$  представляет собой пересечение  $N$  кругов (радиусы не обязательно одинаковы). Какое максимальное число криволинейных «сторон» может иметь фигура  $\Phi$ ? (Криволинейная сторона — это участок границы  $\Phi$ , принадлежащий одной из окружностей и ограниченный точками пересечения с другими окружностями.)

*Н. Бродский*

## 10—11 классы

16. Коэффициенты квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$  изменили не больше, чем на 0,001. Может ли больший корень уравнения измениться больше, чем на 1000?

*Фольклор*

17. Покажите, как разбить пространство

а) на одинаковые тетраэдры,

б) на одинаковые равногранные тетраэдры

(тетраэдр называется равногранным, если все его грани — равные треугольники).

*Н. Васильев*

18. В треугольник  $ABC$  вписана окружность с центром  $O$ . Медиана  $AD$  пересекает ее в точках  $X$  и  $Y$ . Найдите угол  $XOY$ , если  $AC = AB + AD$ .

*А. Федотов*

19. Докажите, что для любых положительных чисел  $a_1, \dots, a_n$  справедливо неравенство

$$\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right) \left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right) \dots \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right) \geq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n).$$

*Л. Курляндчик*

20. Периоды двух последовательностей —  $m$  и  $n$  — взаимно простые числа. Какова максимальная длина начального куска, который может у них совпадать?

*А. Канель-Белов*

Сравните с задачей IV.2.

21. Рассматривается последовательность,  $n$ -й член которой есть первая цифра числа  $2^n$ . Докажите, что количество различных «слов» длины 13 — наборов из 13 подряд идущих цифр — равно 57.

*А. Канель-Белов*

22. См. задачу 15.

## Весна, 1995 год

### Базовый вариант

#### 8—9 классы

23. У кассира были 10-, 15- и 20-копеечные монеты — всего 30 монет на сумму 5 рублей. Докажите, что 20-копеечных монет у него было больше, чем 10-копеечных.

*Фольклор*

24. Три кузнечика сидят на прямой так, что два крайних отстоят на 1 м от среднего. Каждую секунду один из кузнечиков прыгает через другого в симметричную точку (если  $A$  прыгает через  $B$  в точку  $A_1$ , то  $AB = BA_1$ ). Через некоторое время кузнечики оказались на тех же местах, что и вначале, но в другом порядке. Докажите, что поменялись местами крайние кузнечики.

*А. Ковальджи*

Сравните с задачей XV.28, а также с задачей XV.19.

25. Известно, что вершины квадрата  $T_1$  принадлежат прямым, содержащим стороны квадрата  $T_2$ , а вписанная окружность квадрата  $T_1$  совпадает с описанной окружностью квадрата  $T_2$ . Найдите углы восьмиугольника, образованного вершинами квадрата  $T_2$  и точками касания окружности со сторонами квадрата  $T_1$ ,

и величины дуг, на которые вершины восьмиугольника делят окружность.

*С. Маркелов*

**26.** Докажите, что число  $40 \dots 09$  — не полный квадрат (при любом числе нулей, начиная с 1).

*В. Сендеров*

### 10—11 классы

**27.** На отрезке  $[0, 1]$  числовой оси расположены четыре точки:  $a, b, c, d$ . Докажите, что найдется такая точка  $x$ , принадлежащая  $[0, 1]$ , что

$$\frac{1}{|x-a|} + \frac{1}{|x-b|} + \frac{1}{|x-c|} + \frac{1}{|x-d|} < 40.$$

*Л. Курляндчик*

**28.** Четыре кузнечика сидели в вершинах квадрата. Каждую секунду один из кузнечиков прыгает через другого в симметричную точку (если  $A$  прыгает через  $B$  в точку  $A_1$ , то векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BA_1}$  равны). Докажите, что три кузнечика не могут оказаться

а) на одной прямой, параллельной стороне квадрата;

б) на одной произвольной прямой.

*А. Ковальджи*

Сравните с задачей 24, а также с задачей XV.19.

**29.** Треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром  $O$ . Прямые  $AC$  и  $BC$  вторично пересекают описанную окружность треугольника  $AOB$  в точках  $E$  и  $K$ . Докажите, что прямые  $OC$  и  $EK$  перпендикулярны.

*С. Маркелов*

**30.** Докажите, что число  $a0 \dots 09$  — не полный квадрат (при любом числе нулей, начиная с одного;  $a$  — цифра, отличная от 0).

*В. Сендеров*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

**31.** Докажите, что если  $a, b, c$  — целые числа и, кроме того,  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$  и  $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$  также целые числа, то  $|a| = |b| = |c|$ .

*А. Грибалко*

**32.** Прямая отсекает от правильного десятиугольника  $A_1A_2 \dots A_{10}$  со стороной 1 треугольник  $PA_1Q$ , в котором  $PA_1 + A_1Q = 1$ .

Найдите сумму углов, под которыми виден отрезок  $PQ$  из вершин  $A_2, A_3, \dots, A_{10}$ .

*В.Произволов*

**33.** Дан равносторонний треугольник  $ABC$ . Найдите геометрическое место таких точек  $P$ , что отрезки прямых  $AP$  и  $BP$ , лежащие внутри треугольника, равны.

*Фольклор*

**34.** Может ли быть простым число  $a + b + c + d$ , если  $a, b, c$  и  $d$  — целые положительные числа и  $ab = cd$ ?

*Фольклор*

**35.** Есть 4 равных прямоугольных треугольника. Разрешается любой разрезать на два по высоте, опущенной на гипотенузу. С полученными треугольниками можно повторять эту операцию. Докажите, что после любого числа таких операций среди треугольников найдутся равные.

*А.Шаповалов*

**36.** Может ли случиться, что 6 попарно непересекающихся параллелепипедов расположены в пространстве так, что из некоторой им не принадлежащей точки пространства не видно ни одной из их вершин? (Параллелепипеды непрозрачны.)

*В.Произволов, С.Маркелов, А.Канель-Белов*

**37.** Геологи взяли в экспедицию 80 банок консервов, веса которых все известны и различны (имеется список). Через некоторое время надписи на консервах стали нечитаемыми, и только завхоз знает, где что. Он может это всем доказать (т.е. обосновать, что в какой банке находится), не вскрывая консервов и пользуясь только сохранившимся списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов. Докажите, что для этой цели ему

а) достаточно четырех взвешиваний;

б) недостаточно трех.

*А.Толпыго*

Сравните с задачей XX.6, а также с задачей XXVIII.17.

## **10—11 классы**

**38.** Существует ли такая сфера, на которой имеется ровно одна рациональная точка? (Рациональная точка — точка, у которой все три декартовы координаты — рациональные числа.)

*А.Рубин*

39. При каких  $n$  можно раскрасить в три цвета все ребра  $n$ -угольной призмы (основания —  $n$ -угольники) так, что в каждой вершине сходятся все три цвета и у каждой грани (включая основания) есть стороны всех трех цветов?

*А. Шаповалов*

40. На боковых сторонах  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  как на диаметрах построены окружности. Известно, что точка пересечения диагоналей  $O$  лежит вне кругов. Докажите, что все четыре касательные, проведенные к окружностям из  $O$ , равны между собой.

*С. Маркелов*

41. На координатной плоскости отмечены некоторые точки с целыми координатами. Дано, что никакие четыре из них не лежат на одной окружности. Докажите, что найдется круг радиуса 1995, в котором не отмечено ни одной точки.

*А. Шаповалов*

42. а) Разбейте отрезок  $[0, 1]$  на черные и белые интервалы так, чтобы для любого многочлена  $P(x)$  степени не выше второй сумма приращений  $P(x)$  по всем черным интервалам равнялась сумме приращений  $P(x)$  по всем белым интервалам. (Приращением  $P(x)$  по интервалу  $(a, b)$  называется число  $P(b) - P(a)$ .)

б) Удастся ли проделать аналогичную операцию для всех многочленов степени не выше 1995?

*Г. Кондаков*

43. Существует ли такой невыпуклый многогранник, что из некоторой точки  $M$ , лежащей вне его, не видна ни одна из его вершин? (Многогранник сделан из непрозрачного материала, так что сквозь него ничего не видно.)

*А. Канель-Белов, С. Маркелов*

44. Докажите, что среди 50 человек найдутся двое, у которых четное число общих знакомых (быть может, 0) среди остальных 48 человек.

*С. Токарев*



# ХVII Турнир городов (1995/96)

Осень, 1995 год

Базовый вариант

8—9 классы

1. На плоскости расположен квадрат, и невидимыми чернилами нанесена точка  $P$ . Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от нее лежит  $P$  (если  $P$  лежит на прямой, то он говорит, что  $P$  лежит на прямой). Какое наименьшее число таких вопросов необходимо задать, чтобы узнать, лежит ли точка  $P$  внутри квадрата?

*А. Канель-Белов*

2. Существуют ли 100 натуральных чисел таких, что их сумма равна их наименьшему общему кратному? (Среди чисел могут быть равные.)

*С. Токарев*

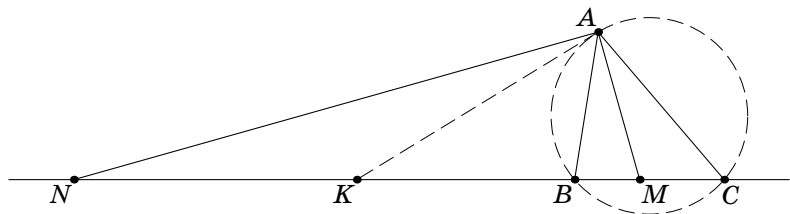
Сравните с задачей XII.3.

3. Бумажный прямоугольник  $ABCD$  площади 1 сложили по прямой так, что точка  $C$  совпала с  $A$ . Докажите, что площадь получившегося пятиугольника меньше  $3/4$ .

*Фольклор*

4. Через вершину  $A$  остроугольного треугольника  $ABC$  проведены биссектрисы  $AM$  и  $AN$  внутреннего и внешнего углов и касательная  $AK$  к описанной окружности треугольника  $ABC$  (точки  $M$ ,  $K$ ,  $N$  лежат на прямой  $BC$ ). Докажите, что  $MK = KN$ .

*И. Шарыгин*



**10—11 классы**

5. См. задачу 1.

6. а) Существуют ли четыре таких различных натуральных числа, что сумма любых трех из них есть простое число?

б) Существуют ли пять таких различных натуральных чисел, что сумма любых трех из них есть простое число?

*В.Сендеров*

7. Шестизначное число начинается с цифры 5. Верно ли, что к нему всегда можно приписать справа 6 цифр так, чтобы получился полный квадрат?

*А.Толпыго*

8. На плоскости даны три точки  $A, B, C$ . Через точку  $C$  проведите прямую так, чтобы произведение расстояний от этой прямой до  $A$  и  $B$  было максимальным. Единственна ли такая прямая?

*Н.Васильев*

**Сложный вариант****8—9 классы**

9. Докажите, что внутри остроугольного треугольника  $ABC$  существует такая точка  $N$ , что основания  $P, Q, R$  перпендикуляров, опущенных из нее на стороны  $AB, AC, BC$ , являются вершинами равностороннего треугольника.

*Н.Васильев*

10. Последовательность определяется так: первые ее члены — 1, 2, 3, 4, 5. Далее каждый следующий (начиная с 6-го) равен произведению всех предыдущих членов минус 1. Докажите, что сумма квадратов первых 70 членов последовательности равна их произведению.

*Л.Курляндчик*

11. Пусть  $AK$  — биссектриса треугольника  $ABC$ ,  $P$  и  $Q$  — такие точки на двух других биссектрисах (или их продолжениях), что  $PA = PK$ ,  $QA = QK$ . Докажите, что  $\angle PAQ = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ .

*Фольклор*

12. В компанию из  $N$  человек пришел журналист. Ему известно, что в этой компании есть человек  $Z$ , который знает всех

остальных членов компании, но его не знает никто. Журналист может к каждому члену компании обратиться с вопросом: «Знаете ли вы такого-то?»

а) Может ли журналист установить, кто из компании есть  $Z$ , задав меньше, чем  $N$  таких вопросов?

б) Найдите наименьшее количество вопросов, достаточное для того, чтобы наверняка найти  $Z$ , и докажите, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя. (Все отвечают на вопросы правдиво. Одному человеку можно задавать несколько вопросов.)

*Г. Гальперин*

13. а) Существуют ли два равных семиугольника, все вершины которых совпадают, но никакие стороны не совпадают?

б) А три таких семиугольника?

Напоминание: многоугольник на плоскости ограничен несамопересекающейся замкнутой ломаной.

*В. Произволов*

14. Есть доска  $1 \times 1000$ , вначале пустая, и куча из  $n$  фишек. Двое ходят по очереди. Первый игрок своим ходом «выставляет» на доску не более 17 фишек по одной на любое свободное поле (он может взять все 17 из кучи, а может часть взять из кучи, а часть — переставить на доске). Второй снимает с доски любую серию фишек (серия — это несколько фишек, стоящих подряд, т. е. без свободных полей между ними) и кладет их обратно в кучу. Первый выигрывает, если ему удастся выставить все (!) фишки в ряд без пробелов.

а) Докажите, что при  $n = 98$  первый всегда может выиграть.

б) При каком наибольшем  $n$  первый всегда может выиграть?

*А. Шаповалов*

## 10—11 классы

15. Внутри выпуклого четырехугольника  $ABCD$  расположена точка  $P$ . Строятся биссектрисы  $PK$ ,  $PL$ ,  $PM$  и  $PN$  углов  $APB$ ,  $BPC$ ,  $CPD$  и  $DPA$  соответственно.

а) Найдите хотя бы одну такую точку  $P$ , при которой четырехугольник  $KLMN$  — параллелограмм.

б) Найдите все такие точки.

*С. Токарев*

16. Дано  $n$  чисел,  $P$  — их произведение. Разность между  $P$  и каждым из этих чисел — нечетное целое число. Докажите, что все данные  $n$  чисел иррациональны.

*Г. Гальперин*

17. Прямоугольник так разбит на прямоугольные треугольники, граничащие друг с другом только по целым сторонам, что общая сторона двух треугольников всегда служит катетом одного и гипотенузой другого. Докажите, что отношение большей стороны прямоугольника к меньшей не менее 2.

*А. Шаповалов*

18. Кресла для зрителей вдоль лыжной трассы занумерованы по порядку: 1, 2, 3, ..., 1000. Кассирша продала  $n$  билетов на все первые 100 мест, но  $n$  больше 100, так как на некоторые места она продала больше одного билета (при этом  $n < 1000$ ). Зрители входят на трассу по одному. Каждый, подойдя к своему месту, занимает его, если оно свободно, если же занято, говорит «Ох!», идет в сторону роста номеров до первого свободного места и занимает его. Каждый раз, обнаружив очередное место занятым, он говорит «Ох!». Докажите, что все рассядутся и что число «охов» не зависит от того, в каком порядке зрители выходят на трассу.

*А. Шень*

Сравните с задачей XX.20.

19. На берегу круглого озера растут 6 сосен. Известно, что если взять такие два треугольника, что вершины одного совпадают с тремя из сосен, а вершины другого — с тремя другими, то в середине отрезка, соединяющего точки пересечения высот этих треугольников, на дне озера находится клад. Неизвестно только, как нужно разбить данные шесть точек на две тройки.

Сколько раз придется опуститься на дно озера, чтобы наверняка отыскать клад?

*С. Маркелов*

20. Существует ли такая возрастающая арифметическая прогрессия

а) из 11,

б) из 10 000,

в) из бесконечного числа натуральных чисел,

что последовательность сумм цифр ее членов — также возрастающая арифметическая прогрессия?

*А. Шаповалов*

**Весна, 1996 год****Базовый вариант****8—9 классы**

**21.** Наибольший угол остроугольного треугольника в пять раз больше наименьшего. Найдите углы этого треугольника, если известно, что все они выражаются целым числом градусов.

*Г. Гальперин*

**22.** Существует ли такое число  $n$ , что числа

а)  $n - 96$ ,  $n$ ,  $n + 96$ ;

б)  $n - 1996$ ,  $n$ ,  $n + 1996$

простые? (Все простые числа положительные.)

*В. Сендеров*

**23.** Под каким углом видна из вершины  $C$  прямого угла прямоугольного треугольника проекция на гипотенузу вписанной окружности?

*М. Евдокимов*

**24.** Рассматриваются всевозможные шестизвенные замкнутые ломаные, все вершины которых лежат на окружности.

а) Нарисуйте такую ломаную, которая имеет наибольшее возможное число точек самопересечения.

б) Докажите, что большего числа самопересечений такая ломаная не может иметь.

*Н. Васильев*

**25.** Двое играют в крестики-нолики на доске  $10 \times 10$  по следующим правилам. Сначала они заполняют крестиками и ноликами всю доску, ставя их по очереди (начинающий игру ставит крестики, его партнер — нолики). Затем подсчитываются два числа:  $K$  — число пятерок подряд стоящих крестиков и, аналогично,  $H$  — число пятерок подряд стоящих ноликов. (Считаются пятерки, стоящие по горизонтали, по вертикали и параллельно диагонали; если подряд стоят шесть крестиков, то это дает две пятерки, если семь — то три, и т. д.) Число  $K - H$  считается выигрышем первого игрока (проигрышем второго).

а) Существует ли у первого игрока беспроигрышная стратегия?

б) Существует ли у него выигрышная стратегия?

*А. Канель-Белов*

Сравните с задачей XX.32.

**10—11 классы**

26. Сто человек ответили на вопрос: «Будет ли новый президент лучше прежнего?» Из них  $a$  человек считают, что будет лучше,  $b$  — что будет такой же, и  $c$  — что будет хуже. Социологи построили два показателя «оптимизма» опрошенных:  $m = a + b/2$  и  $n = a - c$ . Оказалось, что  $m = 40$ . Найдите  $n$ .

*А. Ковальджи*

27. Девять цифр: 1, 2, 3, ..., 9 выписаны в некотором порядке (получилось 9-значное число). Рассмотрим все тройки цифр, идущих подряд, и найдем сумму соответствующих семи трехзначных чисел. Каково наибольшее возможное значение этой суммы?

*А. Галочкин*

28. Рассмотрим произведение ста сомножителей:  $1!, 2!, 3!, \dots, 100!$ . Можно ли выбросить один из этих сомножителей, чтобы произведение оставшихся было полным квадратом?

*С. Токарев*

29. Можно ли разбить все пространство на правильные тетраэдры и октаэдры?

*А. Канель-Белов*

30. На сторонах треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построены квадраты  $ABMN$ ,  $BCKL$ ,  $ACPQ$ . На отрезках  $NQ$  и  $PK$  построены квадраты  $NQZT$  и  $PKXY$ . Разность площадей квадратов  $ABMN$  и  $BCKL$  равна  $d$ . Найдите разность площадей квадратов  $NQZT$  и  $PKXY$

- а) в случае, если угол  $ABC$  прямой,
- б) в общем случае.

*А. Герко*

**Сложный вариант****8—9 классы**

31. Положительные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $a^2 + b^2 - ab = c^2$ . Докажите, что  $(a - c)(b - c) \leq 0$ .

*А. Егоров*

32. Заданы две непересекающиеся окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  и их общая внешняя касательная, касающаяся окружностей в точках  $A_1$  и  $A_2$  соответственно. Пусть  $B_1$  и  $B_2$  — точки пересечения отрезка  $O_1O_2$  с соответствующими окружностями, а  $C$  — точка пересечения прямых  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ . Докажите, что прямая,

проведенная через точку  $C$  перпендикулярно  $B_1B_2$ , делит отрезок  $A_1A_2$  пополам.

*Фольклор*

33. В ряд выписаны действительные числа  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{1996}$ . Докажите, что можно выделить одно или несколько стоящих рядом чисел так, что их сумма будет отличаться от целого числа меньше, чем на 0,001.

*А. Канель-Белов*

34. В углу прямоугольной клетчатой доски размером  $m \times n$  стоит ладья. Двое поочередно передвигают ее по вертикали или по горизонтали на любое число полей; при этом не разрешается, чтобы ладья встала на поле или прошла через поле, на котором она уже побывала (или через которое уже проходила). Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. Кто из играющих может обеспечить себе победу: начинающий или его партнер, и как ему следует играть?

*В. Бегун*

Сравните с задачей X.30.

35. а) Восемь учеников решали восемь задач. Оказалось, что каждую задачу решили 5 учеников. Докажите, что найдутся такие два ученика, что каждую задачу решил хотя бы один из них.

б) Если каждую задачу решило 4 ученика, то может оказаться, что таких двоих не найдется. Докажите это.

*С. Токарев*

36. В равностороннем треугольнике  $ABC$  на стороне  $AB$  взята точка  $D$  так, что  $AD = AB/n$ . Докажите, что сумма  $n - 1$  углов, под которыми виден отрезок  $AD$  из точек, делящих сторону  $BC$  на  $n$  равных частей, равна  $30^\circ$ :

а) при  $n = 3$ ;

б) при произвольном  $n$ .

*В. Произволов*

## 10—11 классы

37. Существует ли в пространстве куб, расстояния от вершин которого до данной плоскости равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

*В. Произволов*

38. Кузнечик вначале сидит в точке  $M$  плоскости  $Oxy$  вне квадрата  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  (координаты  $M$  — нецелые, расстояние от  $M$  до центра квадрата равно  $d$ ). Кузнечик прыгает в точку,

симметричную  $M$  относительно самой правой (с точки зрения кузнечика) вершины квадрата. Докажите, что за несколько таких прыжков кузнечик не сможет удалиться от центра квадрата больше, чем на  $10d$ .

*А. Канель-Белов*

**39.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = AC$ ) угол  $A$  равен  $\alpha$ . На стороне  $AB$  взята точка  $D$  так, что  $AD = AB/n$ . Найдите сумму  $n - 1$  углов, под которыми виден отрезок  $AD$  из точек  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ , делящих сторону  $BC$  на  $n$  равных частей:

а) при  $n = 3$ ; б) при произвольном  $n$ .

*В. Произолов*

**40.** В некотором государстве человек может быть зачислен в полицию только в том случае, если он выше ростом, чем 80 % (или больше) его соседей. Чтобы доказать свое право на зачисление в полицию, человек сам называет число  $R$  (радиус), после чего его «соседями» считаются все, кто живет на расстоянии меньше  $R$  от него (число соседей, разумеется, должно быть не нулевое). В этом же государстве человек освобождается от службы в армии только в том случае, если он ниже ростом, чем 80 % (или больше) его соседей. Определение «соседей» аналогично; человек сам называет число  $r$  (радиус) и т. д., причем  $R$  и  $r$  не обязательно совпадают. Может ли случиться, что не менее 90 % населения имеют право на зачисление в полицию и одновременно не менее 90 % населения освобождены от армии?

*Н. Константинов*

**41.** Докажите, что существует бесконечно много таких троек чисел  $n - 1, n, n + 1$ , что:

а)  $n$  представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел, а  $n - 1$  и  $n + 1$  — нет;

б) каждое из трех чисел представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

*В. Сендеров*

**42.** В таблице из  $n$  столбцов и  $2^n$  строк, в которых выписаны все возможные различные наборы из  $n$  чисел 1 и  $-1$ , некоторые числа заменены нулями. Докажите, что можно так выбрать некоторое непустое подмножество строк, что:

а) сумма всех чисел в выбранных строках равна 0;

б) сумма всех выбранных строк есть нулевая строка.

*Г. Кондаков, В. Черноруцкий*



# **XVIII Турнир городов (1996/97)**

**Осень, 1996 год**

**Базовый вариант**

## **8—9 классы**

1. Можно ли найти 10 таких последовательных натуральных чисел, что сумма их квадратов равна сумме квадратов следующих за ними 9 последовательных натуральных чисел?

*Задача с картинки из старого учебника*

2. При каких целых значениях  $n$  правильный треугольник со стороной  $n$  можно замостить плитками, имеющими форму равнобокой трапеции со сторонами 1, 1, 1, 2?

*Н. Васильев*

3. а) Может ли случиться, что в компании из 10 девочек и 9 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек?

б) А если девочек 11, а мальчиков 10?

*Н. Васильев*

4. Окружность пересекает каждую сторону ромба в двух точках и делит ее на три отрезка. Обойдем контур ромба, начав с какой-нибудь вершины, по часовой стрелке и покрасим три отрезка каждой стороны последовательно в красный, белый и синий цвета. Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме синих.

*В. Произволов*

## **10—11 классы**

5. Найдите геометрическое место точек, лежащих внутри куба и равноудаленных от трех скрещивающихся ребер  $a$ ,  $b$ ,  $c$  этого куба.

*В. Произволов*

6. Можно ли бумажный круг с помощью ножниц перекроить в квадрат той же площади? (Разрешается сделать конечное число разрезов по прямым линиям и дугам окружностей.)

*А. Канель-Белов*

**Замечание.** Эта задача не имеет никакого отношения к задаче о квадратуре круга, поскольку не требуется ограничивать свои возможности

циркулем и линейкой (например, разрешается строить отрезки длины, которая не может быть построена циркулем и линейкой).

7. На координатной плоскости  $xOy$  построена парабола  $y = x^2$ . Затем начало координат и оси стерли. Как их восстановить с помощью циркуля и линейки (используя имеющуюся параболу)?

*А. Егоров*

8. При каком  $n > 1$  может случиться так, что в компании из  $n + 1$  девочек и  $n$  мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек?

*Н. Васильев*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

9. Можно ли нарисовать на плоскости четыре красных и четыре черных точки так, чтобы для любой тройки точек одного цвета нашлась такая точка другого цвета, что эти четыре точки являются вершинами параллелограмма?

*Н. Васильев*

Сравните с задачей 15.

10. Существуют ли такие три различных простых числа  $p, q, r$ , что  $p^2 + d$  делится на  $qr$ ,  $q^2 + d$  делится на  $rp$ ,  $r^2 + d$  делится на  $pq$ , если

а)  $d = 10$ , б)  $d = 11$ ?

*В. Сендеров*

11. Докажите неравенство:

$$\frac{2}{2!} + \frac{7}{3!} + \frac{14}{4!} + \frac{23}{5!} + \dots + \frac{k^2 - 2}{k!} + \dots + \frac{9998}{100!} < 3.$$

*В. Сендеров*

12. а) Квадрат разрезан на равные прямоугольные треугольники с катетами 3 и 4 каждый. Докажите, что число треугольников четно.

б) Прямоугольник разрезан на равные прямоугольные треугольники с катетами 1 и 2 каждый. Докажите, что число треугольников четно.

*А. Шаповалов*

13. Существует ли такое 6-значное число  $A$ , что среди чисел  $A, 2A, \dots, 500000A$  нет ни одного числа, оканчивающегося шестью одинаковыми цифрами?

*С. Токарев*

14. Карточка математического лото представляет собой таблицу  $6 \times 6$  клеточек. Играющий отмечает 6 клеточек и отправляет карточку в конверте. После этого в газете публикуется шестерка проигрышных клеточек. Карточка называется «выигрышной», если в ней не отмечена ни одна проигрышная клеточка. Докажите, что

а) можно заполнить 9 карточек так, чтобы среди них обязательно нашлась выигрышная карточка;

б) восьми карточек для этого недостаточно.

Пусть теперь карточка представляет собой таблицу  $10 \times 10$ , играющий отмечает 10 клеточек, и публикуется десятка проигрышных клеточек. Докажите, что

в) можно заполнить 13 карточек так, чтобы среди них обязательно нашлась выигрышная карточка;

г) двенадцати карточек для этого недостаточно.

*С. Токарев*

Вариант а), б) предлагался в 8—9 классах, вариант в), г) — в 10—11 классах.

### 10—11 классы

15. Можно ли так покрасить 4 вершины куба в красный цвет и 4 другие — в синий, чтобы плоскость, проходящая через любые три точки одного цвета, содержала точку другого цвета?

*А. Мёбиус, И. Шарыгин*

16. а) Докажите для всех  $n > 2$  неравенство:

$$3 - \frac{2}{(n-1)!} < \frac{2^2-2}{2!} + \frac{3^2-2}{3!} + \dots + \frac{n^2-2}{n!} < 3.$$

б) Найдите какие-нибудь натуральные числа  $a, b, c$  такие, что для всех  $n > 2$

$$b - \frac{c}{(n-2)!} < \frac{2^3-a}{2!} + \frac{3^3-a}{3!} + \dots + \frac{n^3-a}{n!} < b.$$

*В. Сендеров, Н. Васильев*

17. Пусть  $A', B', C', D', E', F'$  — середины сторон  $AB, BC, CD, DE, EF, FA$  произвольного выпуклого шестиугольника  $ABCDEF$ .

Известны площади треугольников  $ABC'$ ,  $BCD'$ ,  $CDE'$ ,  $DEF'$ ,  $EFA'$ ,  $FAB'$ . Найдите площадь шестиугольника  $ABCDEF$ .

*А. Лопшиц, Н. Васильев*

18. Дано:  $P(x) = x^2 - 1996$ . Докажите, что не существует никакой (даже разрывной) функции  $y = f(x)$ , что  $f(f(x)) = P(x)$  при всех  $x$ .

*С. Богатый, М. Смуров*

19. а) Четыре порта 1, 2, 3, 4 расположены (в этом порядке) на окружности круглого острова. Их связывает плоская сеть дорог, на которых могут быть перекрестки, т. е. точки, где пересекаются, сходятся или разветвляются дороги. На всех участках дорог введено одностороннее движение так, что, выехав от любого порта или перекрестка, нельзя вернуться в него снова. Пусть  $f_{ij}$  означает число различных путей, идущих из порта  $i$  в порт  $j$ . Докажите неравенство:  $f_{14}f_{23} \geq f_{13}f_{24}$ .

б) Докажите, что если портов шесть: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (по кругу в этом порядке), то

$$f_{16}f_{25}f_{34} + f_{15}f_{24}f_{36} + f_{14}f_{26}f_{35} \geq f_{16}f_{24}f_{35} + f_{15}f_{26}f_{34} + f_{14}f_{25}f_{36}.$$

*С. Фомин*

20. См. задачу 14.

## Весна, 1997 год

### Базовый вариант

#### 8—9 классы

21. Сколько целых чисел от 1 до 1997 имеют сумму цифр, делящуюся на 5?

*А. Галочкин*

22. Барон Мюнхгаузен утверждает, что так пустил шар от борта бильярда, имеющего форму правильного треугольника, что тот, отражаясь от бортов, прошел через некоторую точку три раза в трех различных направлениях и вернулся в исходную точку. Могут ли слова барона быть правдой?

*М. Евдокимов*

23. Пусть  $F$  — выпуклая фигура с двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии. Через точку  $M$ , лежащую внутри

фигуры и отстоящую от осей на расстояния  $a$  и  $b$ , провели прямые, параллельные осям. Эти прямые делят  $F$  на четыре области. Найдите разность между суммой площадей большей и меньшей из областей и суммой площадей двух других.

*Г.Гальперин, Н.Васильев*

Смотрите также задачу 28.

24. Квадрат разрезали на 25 квадратиков, из которых ровно у одного сторона имеет длину, отличную от 1 (у каждого из остальных сторона равна 1). Найдите площадь исходного квадрата.

*В.Произволов*

Сравните с задачей 26.

25. В параллелограмме  $ABCD$  точка  $E$  — середина  $AD$ . Точка  $F$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $B$  на прямую  $CE$ . Докажите, что треугольник  $ABF$  равнобедренный.

*М.Волчкевич*

### 10—11 классы

26. Куб разрезали на 99 кубиков, из которых ровно у одного ребро имеет длину, отличную от 1 (у каждого из остальных ребро равно 1). Найдите объем исходного куба.

*В.Произволов*

27. Пусть  $a$  и  $b$  — натуральные числа. Известно, что  $a^2 + b^2$  делится на  $ab$ . Докажите, что  $a = b$ .

*Б.Френкин*

28. Центр круга — точка с декартовыми координатами  $(a, b)$ . Известно, что начало координат лежит внутри круга. Обозначим через  $S^+$  общую площадь тех частей круга, в которых координаты точек имеют одинаковый знак; через  $S^-$  — противоположный знак. Найдите величину  $S^+ - S^-$ .

*Г.Гальперин*

Сравните с задачей 23.

29. Около правильного тетраэдра  $ABCD$  описана сфера. На его гранях как на основаниях построены во внешнюю сторону правильные пирамиды  $ABCD'$ ,  $ABDC'$ ,  $ACDB'$ ,  $BCDA'$ , вершины которых лежат на этой сфере. Найдите угол между плоскостями  $ABC'$  и  $ACD'$ .

*А.Заславский*

**30.** Играют двое, ходят по очереди. Первый ставит на плоскости красную точку, второй в ответ ставит 10 синих точек (синие и красные точки не должны совпадать). Затем опять первый ставит красную точку, второй ставит на свободные места 10 синих, и т. д. Первый считается выигравшим, если какие-то три красные точки образуют правильный треугольник. Может ли второй ему помешать?

*А. Канель-Белов*

Сравните с задачей IV.20.

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

**31.** В треугольнике сторона  $a$  в три раза меньше суммы двух других. Докажите, что против этой стороны лежит наименьший угол треугольника.

*А. Толпыго*

**32.** См. задачу 38.

**33.** Шахматисты дважды сыграли полный шахматный турнир, где каждый сыграл с каждым (за выигрыш дается 1 очко, за проигрыш — 0, за ничью —  $1/2$  очка). Оказалось, что во втором турнире сумма очков каждого игрока изменилась не меньше, чем на  $n$ . Докажите, что она изменилась ровно на  $n$ , если шахматистов было  $2n$  человек.

*Б. Френкин*

**34.** В выпуклом шестиугольнике  $AC'BA'SB'$  стороны попарно равны:  $AB' = AC'$ ,  $BC' = BA'$ ,  $CA' = CB'$ , и  $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A' + \angle B' + \angle C'$ . Докажите, что площадь треугольника  $ABC$  равна половине площади шестиугольника.

*В. Произволов*

Сравните с задачей XI.10.

**35.** Докажите, что число

а)  $97^{97}$ , б)  $1997^{17}$

нельзя представить в виде суммы кубов нескольких идущих подряд натуральных чисел.

*А. Егоров*

36. Пусть  $P$  — внутренняя точка равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ),  $\angle ABC = 80^\circ$ ,  $\angle PAC = 40^\circ$ ,  $\angle ACP = 30^\circ$ . Найдите  $\angle BPC$ .

*Г. Гальперин*

37. Имеется набор гирь, веса которых в граммах: 1, 2, 4, ..., 512 (последовательные степени двойки) — по одной гире каждого веса. Груз разрешается взвешивать с помощью этого набора, кладя гири на обе чашки весов.

а) Докажите, что никакой груз нельзя взвесить этими гирями больше, чем 89 способами.

б) Приведите пример груза, который можно взвесить ровно 89 способами.

*А. Шаповалов, А. Кулаков*

### 10—11 классы

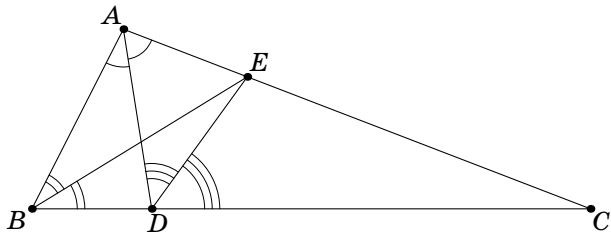
38. Имеется 25 кусков сыра разного веса. Всегда ли можно один из этих кусков разрезать на две части и разложить сыр в два пакета так, что части разрезанного куска окажутся в разных пакетах, веса пакетов будут одинаковы и число кусков в пакетах также будет одинаково?

*В. Дольников*

39. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AD$  и  $BE$ . Известно, что  $DE$  — биссектриса угла  $ADC$ . Найдите величину угла  $A$ .

*С. Токарев*

Сравните с задачей VII.13.



40. Имеется набор из 20 гирь, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 г до 1997 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую). Каков минимально возможный вес самой тяжелой гири такого набора, если:

- а) веса гирь набора все целые,  
б) веса не обязательно целые?

*М.Разин*

**41.** Контуры выпуклых многоугольников  $F$  и  $G$  не имеют общих точек, причем  $G$  расположен внутри  $F$ . Хорду многоугольника  $F$  — отрезок, соединяющий две точки контура  $F$ , — назовем опорной для  $G$ , если она пересекается с  $G$  только по точкам контура: содержит либо только вершину, либо сторону  $G$ .

а) Докажите, что найдется опорная хорда, середина которой принадлежит контуру  $G$ .

б) Докажите, что найдутся две такие хорды.

*П.Пушкарь, В.Дольников*

**42.** Положительные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $abc = 1$ . Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq 1$$

*Г.Гальперин*

**43.** Пусть

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = F(x)G(x),$$

где  $F$  и  $G$  — многочлены, коэффициенты которых — нули и единицы ( $n > 1$ ). Докажите, что один из многочленов  $F$ ,  $G$  представим в виде

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1})T(x), \quad (k > 1),$$

где  $T(x)$  — также многочлен с коэффициентами 0 и 1.

*В.Сендеров, М.Вялый*

**44.** На плоскости дано конечное число полос, суммарная ширина которых равна 100, и круг радиуса 1. Докажите, что каждую из полос можно параллельно перенести так, чтобы все они покрывали круг. (Полоса — часть плоскости, заключенная между двумя параллельными прямыми.)

*М.Смулов*



# **XIX Турнир городов (1997/98)**

**Осень, 1997 год**

**Базовый вариант**

## **8—9 классы**

1. По неподвижному эскалатору человек быстрее спускается, чем поднимается. Что быстрее: спуститься и подняться по поднимающемуся эскалатору или спуститься и подняться по спускающемуся эскалатору?

*Фольклор*

2. Докажите, что уравнение  $x^2 + y^2 - z^2 = 1997$  имеет бесконечно много решений в целых числах.

*Н. Васильев*

3. В квадрате  $ABCD$  точки  $K$  и  $M$  принадлежат сторонам  $BC$  и  $CD$  соответственно, причем  $AM$  — биссектриса угла  $KAD$ . Докажите, что длина отрезка  $AK$  равна сумме длин отрезков  $DM$  и  $BK$ .

*Фольклор*

4. а) Каким наименьшим числом прямых можно разрезать все клетки доски  $3 \times 3$ ? Нарисуйте такие прямые и докажите, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. (Чтобы клетка была разрезана, прямая должна проходить через внутреннюю точку этой клетки.)

б) Та же задача для доски  $4 \times 4$ .

*М. Вялый*

## **10—11 классы**

5. См. задачу 4.

6. Пусть  $a$  и  $b$  — две данные стороны треугольника. Как подобрать третью сторону  $c$  так, чтобы точки касания вписанной и невписанной окружностей со стороной  $c$  делили эту сторону на три равных отрезка? При каких  $a$  и  $b$  такая сторона  $c$  существует?

*Фольклор*

7. Докажите, что уравнение

$$xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

*Н. Васильев*

8. На шахматной доске  $5 \times 5$  расставили максимальное число коней так, чтобы они не били друг друга. Докажите, что такая расстановка — единственная.

*А. Канель-Белов*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

9. Последовательность  $\{x_n\}$  определяется условиями:

$$x_1 = 19; \quad x_2 = 97; \quad x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Докажите, что среди членов последовательности найдется нуль. Найдите номер этого члена.

*А. Берзиньш*

10. Пусть  $M$  — середина основания  $BC$  треугольника  $ABC$ . Постройте такую прямую  $l$ , пересекающую треугольник и параллельную его основанию, что ее отрезок, заключенный внутри треугольника, виден из точки  $M$  под прямым углом.

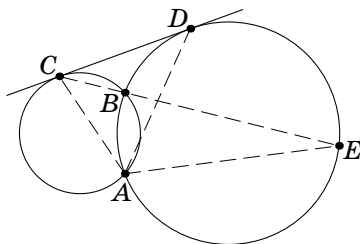
*Фольклор*

11. Первоначально на каждом поле доски  $1 \times n$  стоит шашка. Первым ходом разрешается переставить любую шашку на соседнюю клетку (одну из двух, если шашка не с краю), так что образуется столбик из двух шашек. Далее очередным ходом каждый столбик можно передвинуть в любую сторону на столько клеток, сколько в нем шашек (в пределах доски); если столбик попал на непустую клетку, он ставится на стоящий там столбик и объединяется с ним.

Докажите, что за  $n - 1$  ход можно собрать все шашки на одной клетке.

*А. Шаповалов*

12. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . К ним проведена общая касательная, которая касается первой окружности



в точке  $C$ , а второй — в точке  $D$ . Пусть  $B$  — ближайшая точка к прямой  $CD$ . Прямая  $CB$  пересекла вторую окружность второй раз в точке  $E$ . Докажите, что  $AD$  — биссектриса угла  $CAE$ .

*П. Кожевников*

13. Раскрашенный в черный и белый цвета кубик с гранью в одну клетку ставят на одну из клеток шахматной доски и перекатывают по ней так, чтобы кубик побывал на каждой клетке ровно по одному разу. Можно ли так раскрасить кубик и так прокатить его по доске, чтобы каждый раз цвета клетки и соприкоснувшейся с ней грани совпадали?

*А. Шаповалов*

Сравните с задачей XXVII.10.

14. См. задачу 20 а).

#### 10—11 классы

15. Пусть  $CM$  и  $BN$  — медианы треугольника  $ABC$ ,  $P$  и  $Q$  — такие точки на  $AB$  и  $AC$  соответственно, что биссектриса угла  $C$  треугольника одновременно является биссектрисой угла  $MCP$ , а биссектриса угла  $B$  — биссектрисой угла  $NBQ$ . Оказалось, что  $AP = AQ$ . Следует ли из этого, что треугольник  $ABC$  равнобедренный?

*В. Сендеров*

16. Верны ли следующие утверждения?

а) Если многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить на два равных многоугольника и отрезком.

б) Если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить на два равных многоугольника и отрезком.

в) Если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два многоугольника, которые можно перевести друг в друга с помощью движения, сохраняющего ориентацию (т. е. с помощью поворота и параллельного переноса), то его можно разбить отрезком на два многоугольника, которые можно перевести друг в друга с помощью движения, сохраняющего ориентацию.

*С. Маркелов*

17. Перемножаются все выражения вида

$$\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \dots \pm \sqrt{99} \pm \sqrt{100}$$

(при всевозможных комбинациях знаков). Докажите, что результат  
а) целое число, б) квадрат целого числа.

*А. Канель-Белов*

18. а) На стол положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму правильного шестиугольника, причем у всех салфеток одна сторона параллельна одной и той же прямой. Всегда ли можно вбить в стол несколько гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причем каждая — только одним гвоздем?

б) Тот же вопрос про правильные пятиугольники.

*А. Канель-Белов*

19. Дима придумал секретный шифр: каждая буква заменяется на слово длиной не больше 10 букв. Шифр называется хорошим, если всякий зашифрованный текст расшифровывается однозначно. Сережа убедился (с помощью компьютера), что если зашифровать текст длиной не больше 10 000 букв, то получившийся в результате текст расшифровывается однозначно. Следует ли из этого, что шифр хороший? (В алфавите 33 буквы, «словом» или «текстом» мы называем любую последовательность букв, независимо от того, имеет ли она смысл.)

*Д. Пионтковский, С. Шалунов*

20. Каждая сторона правильного треугольника разбита на  $n$  равных отрезков, и через все точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Данный треугольник разбился на  $n^2$  маленьких треугольников-клеток. Треугольники, расположенные между двумя соседними параллельными прямыми, образуют полосу.

а) Какое наибольшее число клеток можно отметить, чтобы никакие две отмеченные клетки не принадлежали одной полоске ни по одному из трех направлений, если  $n = 10$ ?

б) Тот же вопрос для  $n = 9$ .

*Р. Женодаров*

## Весна, 1998 год

### Базовый вариант

#### 8—9 классы

21. Аня, Боря и Вася составляли слова из заданных букв. Все составили разное число слов: больше всех — Аня, меньше всех —

Вася. Затем ребята просуммировали очки за свои слова. Если слово есть у двух игроков, за него дается 1 очко, у одного игрока — 2 очка, слова, общие у всех трех игроков, вычеркиваются. Могло ли так случиться, что больше всех очков набрал Вася, а меньше всех — Аня?

*А. Шаповалов*

Сравните с задачей XV.4.

**22.** Шахматный король обошел всю доску  $8 \times 8$ , побывав на каждой клетке по одному разу, вернувшись последним ходом в исходную клетку. Докажите, что он сделал четное число диагональных ходов.

*В. Произолов*

**23.** Пусть  $AB$  и  $CD$  — отрезки, лежащие на двух сторонах угла ( $O$  — вершина угла,  $A$  лежит между  $O$  и  $B$ ,  $C$  — между  $O$  и  $D$ ). Через середины отрезков  $AD$  и  $BC$  проведена прямая, пересекающая стороны угла в точках  $M$  и  $N$  ( $M$ ,  $A$  и  $B$  лежат на одной стороне угла;  $N$ ,  $C$  и  $D$  — на другой). Докажите, что  $OM/ON = AB/CD$ .

*В. Сендеров*

**24.** См. задачу 27 а).

**24'.** (Давалась в г. Кирове вместо задачи 24.) Незнайка решил уравнение, в левой части которого стоял многочлен третьей степени с целыми коэффициентами, а в правой — 0. Он нашел корень  $1/7$ . Знайка, заглянув к нему в тетрадь, увидел только первые два слагаемых многочлена:  $19x^3 + 98x^2$  и сразу сказал, что ответ неверен. Обоснуйте ответ Знайки.

*И. Рубанов*

**25.** Барон Мюнхгаузен утверждает, что смог разрезать некоторый равнобедренный треугольник на три треугольника так, что из любых двух можно сложить равнобедренный треугольник. Не хвастает ли барон?

*А. Шаповалов*

## 10—11 классы

**26.** Барон Мюнхгаузен утверждает, что ему удалось составить некоторый прямоугольник из нескольких подобных между собой непрямоугольных треугольников. Можно ли ему верить? (Среди подобных треугольников могут быть и равные.)

*А. Федотов*

**27. а)** Для каждого трехзначного числа берем произведение его цифр, а затем эти произведения, вычисленные для всех трехзначных чисел, складываем. Сколько получится?

**б)** Та же задача, если берутся все четырехзначные числа.

(Пояснение: берется произведение всех цифр числа, так что если хотя бы одна из цифр — ноль, то и произведение — ноль.)

*Г.Гальперин*

Задача а) давалась в 8—9 классах, задача б) в 10—11 классах.

**28.** В какое наибольшее число цветов можно раскрасить шахматную доску  $8 \times 8$  так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета?

*А.Шаповалов*

**29.** Положительные числа  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  таковы, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = A, \\ |x| + |y| = B \end{cases}$$

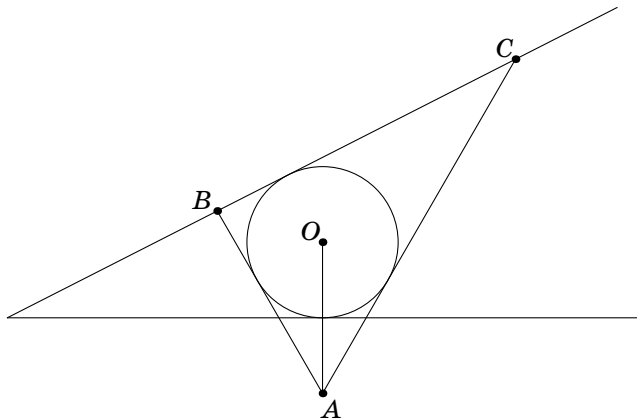
имеет  $m$  решений, а система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C, \\ |x| + |y| + |z| = D \end{cases}$$

имеет  $n$  решений. Известно, что  $m > n > 1$ . Найдите  $m$  и  $n$ .

*Г.Гальперин*

**30.** В угол вписана окружность,  $O$  — ее центр. Через точку  $A$ , симметричную точке  $O$  относительно одной из сторон угла, прове-



ли к окружности касательные, точки пересечения которых с дальней от точки  $A$  стороной угла —  $B$  и  $C$  (см. рисунок). Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $ABC$  лежит на биссектрисе данного угла.

*И. Шарыгин*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

31. Существует ли такой набор из 10 натуральных чисел, что каждое не делится ни на одно из остальных, а квадрат каждого делится на каждое из остальных?

*Фольклор*

32. На стороне  $AB$  параллелограмма  $ABCD$  (или на ее продолжении) взята такая точка  $M$ , что  $\angle MAD = \angle AMO$ , где  $O$  — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Докажите, что  $MD = MC$ .

*М. Смулов*

33. Шесть игральных костей нанизали на спицу так, что каждая может вращаться независимо от остальных (протыкаем через центры противоположных граней). Спицу положили на стол и прочитали число, образованное цифрами на верхних гранях костей. Докажите, что можно так повернуть кости, чтобы это число делилось на 7. (На гранях стоят цифры от 1 до 6, сумма цифр на противоположных гранях равна 7.)

*Г. Гальперин*

34. Путешественник посетил деревню, каждый житель которой либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Жители деревни встали в круг лицом к центру, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив ли он. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей составляют лжецы. Определите и вы, чему она равна.

*Б. Френкин*

35. Квадрат разбит прямыми на 25 квадратиков-клеток. В некоторых клетках нарисована одна из диагоналей так, что никакие две диагонали не имеют общей точки (даже общего конца). Каково наибольшее возможное число нарисованных диагоналей?

*И. Рубанов*

Сравните с задачей XXI.5.

**36.** За круглым столом сидят десять человек, перед каждым — несколько орехов. Всего орехов — сто. По общему сигналу каждый передает соседу справа часть своих орехов: если у него было четное число орехов — половину, если же нечетное, то один орех плюс половину остатка отдает соседу справа. Такая операция повторяется второй раз, затем третий и так далее, до бесконечности. Докажите, что через некоторое время у всех станет по десять орехов.

*А. Шаповалов*

Сравните с задачей IV 22.

### 10—11 классы

**37.** Докажите неравенство:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

( $a, b, c$  — положительные числа).

*Г. Алиханов*

**38.** Квадрат со стороной 1 разрезан на прямоугольники. В каждом прямоугольнике выбрали одну из двух меньших сторон (если прямоугольник — квадрат, то выбрали любую из четырех сторон). Докажите, что сумма всех выбранных сторон не меньше 1.

*Фольклор*

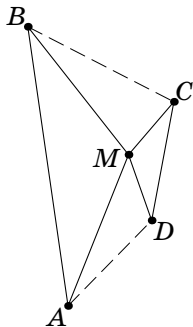
**39. а)** На доске выписаны числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Разрешается стереть любые два числа и вместо них выписать их разность — неотрицательное число. После семи таких операций на доске будет только одно число. Может ли оно равняться 97?

**б)** На доске выписаны числа  $1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10}$ . Разрешается стереть любые два числа и вместо них выписать их разность — неотрицательное число. После нескольких таких операций на доске будет только одно число. Чему оно может быть равно?

*А. Шаповалов*

**40.** Внутренняя точка  $M$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  такова, что треугольники  $AMB$  и  $CMD$  — равнобедренные ( $AM = MB$ ,  $CM = MD$ ) и у каждого угол при вершине  $M$  равен  $120^\circ$ . Докажите, что найдется такая точка  $N$ , что треугольники  $BNC$  и  $DNA$  — правильные.

*И. Шарыгин*





**41.** Назовем лабиринтом шахматную доску  $8 \times 8$ , где между некоторыми полями вставлены перегородки. Если ладья может обойти все поля, не перепрыгивая через перегородки, то лабиринт называется хорошим, иначе — плохим. Каких лабиринтов больше — хороших или плохих?

*А. Шаповалов*

**42. а)** Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причем одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные — картинкой вверх. Вторым участником фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.

**б)** Вторым фокус отличается от первого тем, что первый участник выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Могут ли в этом случае участники фокуса так договориться, чтобы второй всегда угадывал невыложенную карту?

*Г. Гальперин по мотивам книги М. Гарднера*

# XX Турнир городов (1998/99)

Осень, 1998 год

Базовый вариант

8—9 классы

1. Куб со стороной 20 разбит на 8000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трех направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя  $1 \times 20 \times 20$ , параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоев.

*А. Канель-Белов*

2. Квадрат целого числа имеет вид ...09 (оканчивается цифрами 0 и 9). Докажите, что третья справа цифра — четная.

*Фольклор*

3. В треугольнике  $ABC$  точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  лежат внутри сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно. Известно, что  $\angle AC'B' = \angle B'A'C$ ,  $\angle CB'A' = \angle A'C'B$ ,  $\angle BA'C' = \angle C'B'A$ . Докажите, что точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  — середины сторон.

*В. Произволов*

4. Двенадцать кандидатов в мэры рассказывали о себе. Через некоторое время один сказал: «До меня соврали один раз». Другой сказал: «А теперь — дважды». «А теперь — трижды», — сказал третий, и так далее до 12-го, который сказал: «А теперь соврали 12 раз». Тут ведущий прервал дискуссию. Оказалось, что по крайней мере один кандидат правильно посчитал, сколько раз соврали до него. Так сколько же раз всего соврали кандидаты?

*А. Шаповалов*

5. Назовем крокодилом шахматную фигуру, ход которой заключается в прыжке на  $m$  клеток по вертикали или по горизонтали, и потом на  $n$  клеток в перпендикулярном направлении. Докажите, что для любых  $m$  и  $n$  можно так раскрасить бесконечную клетчатую доску в 2 цвета (для каждого конкретных  $m$  и  $n$  своя раскраска), что всегда 2 клетки, соединенные одним ходом крокодила, будут покрашены в разные цвета.

*А. Герко*

**10—11 классы**

6. Имеется 19 гирек весом 1 г, 2 г, 3 г, ..., 19 г. Девять из них — железные, девять — бронзовые и одна — золотая. Известно, что общий вес всех железных гирек на 90 г больше, чем общий вес бронзовых. Найдите вес золотой гири.

*В. Произволов*

7. На плоскость уложены  $n$  бумажных кругов радиуса 1 таким образом, что их границы проходят через одну точку, причем эта точка находится внутри всей области плоскости, покрытой кругами. Эта область представляет собой многоугольник с криволинейными сторонами. Найдите его периметр.

*П. Кожевников*

8. На шахматной доске размером  $8 \times 8$  отметили 17 клеток. Докажите, что из них можно выбрать две так, что коню нужно не менее трех ходов для попадания с одной из них на другую.

*Р. Женодаров*

9. Рассматриваются такие наборы

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{20}\}$$

действительных чисел, заключенных между 0 и 1, что

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{20} = (1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdot (1 - x_3) \cdot \dots \cdot (1 - x_{20}).$$

Найдите среди этих наборов такой, для которого значение

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{20}$$

максимально.

*А. Чернятьев*

10. Группа психологов разработала тест, пройдя который, каждый человек получает оценку — число  $Q$  — показатель его умственных способностей (чем больше  $Q$ , тем больше способности). За рейтинг страны принимается среднее арифметическое значений  $Q$  всех жителей этой страны.

а) Группа граждан страны А эмигрировала в страну Б. Покажите, что при этом у обеих стран мог вырасти рейтинг.

б) После этого группа граждан страны Б (в числе которых могут быть и бывшие эмигранты из А) эмигрировала в страну А. Возможно ли, что рейтинги обеих стран опять выросли?

в) Группа граждан страны А эмигрировала в страну Б, а группа граждан Б — в страну В. В результате этого рейтинги каждой страны оказались выше первоначальных. После этого направление миграционных потоков изменилось на противоположное — часть жителей В переехала в Б, а часть жителей Б — в А. Оказалось, что в результате рейтинги всех трех стран опять выросли (по сравнению с теми, которые были после первого переезда, но до начала второго). (Так, во всяком случае, утверждают информационные агентства этих стран.)

Может ли такое быть? (Если да, то как? Если нет, то почему?)

(Предполагается, что за рассматриваемое время показатель  $Q$  у граждан не изменился, никто не умер и не родился.)

*Б. Бегун, А. Канель-Белов*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

11. См. задачу 17 а).

12. У Игоря и Вали есть по белому квадрату  $8 \times 8$ , разбитому на клетки  $1 \times 1$ . Они закрасили по одинаковому числу клеток на своих квадратах в синий цвет. Докажите, что удастся так разрезать эти квадраты на доминошки  $2 \times 1$ , что и из доминошек Игоря, и из доминошек Вали можно будет сложить по квадрату  $8 \times 8$  с одной и той же синей картинкой.

*А. Шаповалов*

13. Отрезок  $AB$  пересекает две равные окружности и параллелен их линии центров, причем все точки пересечения прямой  $AB$  с окружностями лежат между  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  проводятся касательные к окружности, ближайшей к  $A$ , через точку  $B$  — касательные к окружности, ближайшей к  $B$ . Оказалось, что эти четыре касательные образуют четырехугольник, содержащий внутри себя обе окружности. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

*П. Кожевников*

14. В правильном 25-угольнике проведены все диагонали. Докажите, что нет девяти диагоналей, проходящих через одну внутреннюю точку 25-угольника.

*А. Шаповалов*

15. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их каким-то образом разложили в 10 коробок. Известно,

что можно выбрать по бусинке из каждой коробки так, что будут представлены все цвета. Докажите, что число способов такого выбора — это ненулевая степень двойки.

*А. Гришин*

16. Шайка из  $k$  разбойников отобрала у купца мешок монет. В каждой монете целое число грошей. Оказалось, что какую бы монету ни отложить, оставшиеся монеты можно разделить между разбойниками так, чтобы каждый получил одинаковую сумму в грошах. Докажите, что если отложить одну монету, то число монет разделится на  $k$ .

*А. Шаповалов*

### 10—11 классы

17. а) Пусть  $a$  и  $b$  — натуральные числа. Докажите, что если

$$\text{НОК}(a, a+5) = \text{НОК}(b, b+5), \quad \text{то } a = b.$$

б) Может ли  $\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(a+c, b+c)$  ( $a, b, c$  — натуральные)?

*А. Шаповалов*

18. См. задачу 13.

19. В таблицу записано девять чисел:

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
| $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
| $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |

Известно, что шесть чисел — суммы строк и суммы столбцов таблицы — равны между собой:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = \\ = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3. \end{aligned}$$

Докажите, что сумма произведений чисел в строках таблицы равна сумме произведений для столбцов:

$$a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot b_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot b_3 \cdot c_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 + c_1 \cdot c_2 \cdot c_3.$$

*В. Произволов*

Сравните с задачей XXVIII.13.

20. За круглым столом были приготовлены 12 мест для жюри с указанием имени на каждом месте. Николай Николаевич,

пришедший первым, по рассеянности сел не на свое, а на следующее по часовой стрелке место. Каждый член жюри, подходивший к столу после этого, занимал свое место или, если оно уже было занято, шел вокруг стола по часовой стрелке и садился на первое свободное место. Возникшее расположение членов жюри зависит от того, в каком порядке они подходили к столу. Сколько может возникнуть различных способов рассадки жюри?

*А. Шаповалов*

Сравните с задачей XVII.18.

**21.** («Багаж в Московском метрополитене».) Будем называть «размером» прямоугольного параллелепипеда сумму трех его измерений — длины, ширины и высоты. Может ли случиться, что в некотором прямоугольном параллелепипеде поместился больший по размеру прямоугольный параллелепипед?

*А. Шень*

**22.** Дана функция

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d},$$

где трехчлены  $x^2 + ax + b$  и  $x^2 + cx + d$  не имеют общих корней. Докажите, что следующие два утверждения равносильны:

1) найдется числовой интервал, свободный от значений функции;

2) функция  $f(x)$  представима в виде:

$$f(x) = f_1(f_2(\dots(f_{n-1}(f_n(x))\dots)),$$

где каждая из функций  $f_i(x)$  есть функция одного из видов:  $k_i \cdot x + b_i$ ,  $x^{-1}$ ,  $x^2$ .

*А. Канель-Белов*

## Весна, 1999 год

### Базовый вариант

#### 8—9 классы

**23.** Отец и сын катаются на коньках по кругу. Время от времени отец обгоняет сына. После того как сын переменял направление своего движения на противоположное, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец катается на коньках быстрее сына?

*Фольклор*

24. На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построен квадрат  $ABDE$ . Дано:

$$AC = 1 \text{ см} \quad \text{и} \quad BC = 3 \text{ см.}$$

В каком отношении делит сторону  $DE$  биссектриса угла  $C$ ?

*В.Гуровиц, С.Дориченко*

25. На доске написано несколько целых положительных чисел:  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ . Пишем на другой доске следующие числа:  $b_0$  — сколько всего чисел на первой доске,  $b_1$  — сколько там чисел, больших единицы,  $b_2$  — сколько чисел, больших двойки, и т.д., пока получаются положительные числа. На этом заканчиваем — нули не пишем. На третьей доске пишем числа  $c_0, c_1, c_2, \dots$ , построенные по числам второй доски по тому же правилу, по которому числа  $b_0, b_1, b_2, \dots$  строились по числам первой доски. Докажите, что наборы чисел на первой и третьей досках совпадают.

*А.Лебег*

26. На плоскости нарисован черный равносторонний треугольник. Имеется девять треугольных плиток того же размера и той же формы. Нужно положить их на плоскость так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть черного треугольника (хотя бы одну точку внутри него). Как это сделать?

*В.Гуровиц*

Сравните с задачей 31.

27. Квадрат разрезали на 100 прямоугольников восемнадцатью прямыми, из которых 9 параллельны одной стороне квадрата, а 9 — другой. Оказалось, что ровно девять из них — квадраты. Докажите, что среди этих квадратов найдутся два равных между собой.

*В.Произволов*

### 10—11 классы

28. В ряд стоят 1999 чисел. Первое число равно 1. Известно, что каждое число, кроме первого и последнего, равно сумме двух соседних. Найдите последнее число.

*В.Сендеров*

29. См. задачу 24.

30. См. задачу 25.

**31.** На плоскости нарисован черный квадрат. Имеется семь квадратных плиток того же размера. Нужно положить их на плоскость так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть черного квадрата (хотя бы одну точку внутри него). Как это сделать?

*В. Гуровиц*

**32.** Игра происходит на квадрате клетчатой бумаги  $9 \times 9$ . Играют двое, ходят по очереди. Начинаящий игру ставит в свободные клетки крестики, его партнер — нолики. Когда все клетки заполнены, подсчитывается количество строк и столбцов, в которых крестиков больше, чем ноликов, — число  $K$  — и количество строк и столбцов, в которых ноликов больше, чем крестиков — число  $H$  (всего строк и столбцов — 18). Разность  $B = K - H$  считается выигрышем игрока, который начинает. Найдите «цену игры», т. е. такое значение  $B$ , что

1) первый игрок может обеспечить себе выигрыш не меньше  $B$ , как бы ни играл второй игрок;

2) второй игрок всегда может добиться того, что первый получит выигрыш не больше  $B$ , как бы тот ни играл.

*А. Канель-Белов*

Сравните с задачей XVII.25.

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

**33.** В банке 500 долларов. Разрешаются две операции: взять из банка 300 долларов или положить в него 198 долларов. Эти операции можно проводить много раз, при этом, однако, никаких денег, кроме тех, что первоначально лежат в банке, нет. Какую максимальную сумму можно извлечь из банка и как это сделать?

*А. Толпыго*

**34.** Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$ . Докажите, что если окружность, проходящая через точки  $A$ ,  $B$  и  $O$ , касается прямой  $BC$ , то окружность, проходящая через точки  $B$ ,  $C$  и  $O$ , касается прямой  $CD$ .

*А. Заславский*

**35.** Играют двое. Первый выписывает в строку слева направо цифры, произвольно чередуя 0 и 1, пока всех цифр не станет всего 1999. Каждый раз после того, как первый выписал очередную



цифру, второй меняет местами две цифры из уже написанного ряда (когда написана только одна цифра, второй пропускает ход). Всегда ли второй может добиться того, чтобы после его последнего хода расположение цифр было симметричным относительно средней цифры?

*И. Измestьев*

**36.** См. задачу 42.

**37.** Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Пусть  $RS$  — средняя линия, параллельная  $AB$ ,  $T$  — точка пресечения прямых  $PQ$  и  $RS$ . Докажите, что  $T$  лежит на биссектрисе угла  $B$  треугольника.

*М. Евдокимов*

**38.** Ладья, делая ходы по вертикали и горизонтали на соседнее поле, за 64 хода обошла все поля шахматной доски  $8 \times 8$  и вернулась на исходное поле. Докажите, что число ходов по вертикали не равно числу ходов по горизонтали.

*Р. Садыков, А. Шаповалов*

Сравните с задачей XXVII.46.

#### 10—11 классы

**39.** В море плавает предмет, имеющий форму выпуклого многогранника. Может ли случиться, что 90 % его объема находится ниже уровня воды, и при этом больше половины его поверхности находится выше уровня воды?

*А. Шаповалов*

**40.** Пусть  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник, вписанный в окружность с центром в точке  $O$ . Окружности, описанные вокруг треугольников  $ABO$  и  $CDO$ , пересеклись второй раз в точке  $F$ . Докажите, что окружность, проходящая через точки  $A$ ,  $F$  и  $D$ , проходит через точку пересечения  $H$  отрезков  $AC$  и  $BD$ .

*А. Заславский*

**41.** Найдите все пары целых чисел  $(x, y)$ , для которых выполняется условие: числа  $x^3 + y$  и  $x + y^3$  делятся на  $x^2 + y^2$ .

*С. Злобин*

**42.** В круге провели  $2n$  радиусов. Они разделили круг на  $2n$  равных секторов:  $n$  синих и  $n$  красных, чередующихся в произвольном порядке. В синие сектора, начиная с некоторого, записывают против хода часовой стрелки числа от 1 до  $n$ . В красные

сектора, начиная с некоторого, записывают те же числа, но по ходу часовой стрелки. Докажите, что найдется полукруг, в котором записаны все числа от 1 до  $n$ .

*В.Произволов*

**43.** Для каждого целого неотрицательного числа  $i$  определим число  $M(i)$  следующим образом: запишем число  $i$  в двоичной форме; если число единиц в этой записи четно, то  $M(i) = 0$ , а если нечетно — то  $M(i) = 1$  (первые члены этой последовательности: 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, ...).

**а)** Рассмотрим конечную последовательность

$$M(0), M(1), \dots, M(1000).$$

Докажите, что число членов этой последовательности, равных своему правому соседу, не меньше 320.

**б)** Рассмотрим конечную последовательность

$$M(0), M(1), \dots, M(1\,000\,000).$$

Докажите, что число таких членов последовательности, что  $M(i) = M(i + 7)$ , не меньше 450 000.

*А.Канель-Белов*

**44.** См. задачу 38.

# XXI Турнир городов (1999/2000)

Осень, 1999 год

Базовый вариант

8—9 классы

1. а) Бумажный прямоугольный треугольник перегнули по прямой так, что вершина прямого угла совместилась с другой вершиной. В каком отношении делятся диагонали получившегося четырехугольника их точкой пересечения?

б) Бумажный прямоугольный треугольник площади 1 перегнули по прямой так, что вершина прямого угла совместилась с другой вершиной. Полученный четырехугольник разрезали по диагонали, выходящей из третьей вершины исходного треугольника. Найдите площадь наименьшего образовавшегося куска бумаги.

*А. Шаповалов*

2. Рассматриваются тройки целых чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$ , для которых выполнено условие:  $a + b + c = 0$ . Для каждой такой тройки вычисляется число  $d = a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}$ .

а) Может ли случиться, что  $d = 2$ ?

б) Может ли случиться, что  $d$  — простое число?

*В. Сендеров*

3. На плоскости проведено  $n$  прямых. Каждая пересекается ровно с 1999 другими. Найдите  $n$ . (Укажите все возможности.)

*Р. Женодаров*

Сравните с задачей 8.

4. В Италии выпускают часы, в которых часовая стрелка делает в сутки один оборот, а минутная — 24 оборота, причем, как обычно, минутная стрелка длиннее часовой (в обычных часах часовая стрелка делает в сутки два оборота, а минутная — 24). Рассмотрим все положения двух стрелок и нулевого деления итальянских часов, которые встречаются и на обычных часах.

Сколько таких положений существует на итальянских часах в течение суток? (Нулевое деление отмечает 24 часа в итальянских часах и 12 часов в обычных часах.)

*Фольклор*

5. Имеются плашки (вырезанные из картона прямоугольники) размера  $2 \times 1$ . На каждой плашке нарисована одна диагональ.

Есть плашки двух сортов, так как диагональ можно расположить двумя способами, причем плашек каждого сорта имеется достаточно много. Можно ли выбрать

а) 18 плашек и так сложить из них квадрат  $6 \times 6$ ,

б) 32 плашки и так сложить из них квадрат  $8 \times 8$ ,

чтобы концы диагоналей нигде не совпали?

В 8—9 классах предлагался вариант а), в 10—11 классах — б).

*А. Шаповалов*

Сравните с задачами XV.12, XIX.35.

### 10—11 классы

6. В треугольнике точку пересечения биссектрис соединили с вершинами, в результате он разбился на 3 меньших треугольника. Один из меньших треугольников подобен исходному. Найдите его углы.

*А. Шаповалов*

Сравните с задачей XXVII.23.

7. Докажите, что существует бесконечно много натуральных нечетных  $n$ , для которых число  $2^n + n$  — составное.

*В. Сендеров*

8. В пространстве проведено  $n$  плоскостей. Каждая пересекается ровно с 1999 другими. Найдите  $n$ . (Укажите все возможности.)

*Р. Женодаров*

9. Можно ли так отметить на числовой оси 50 отрезков (быть может, перекрывающихся), что выполняются два условия:

а) длины отрезков равны 1, 2, 3, ..., 50;

б) концы отрезков — это все целые точки от 1 до 100 включительно?

*В. Произволов*

10. См. задачу 5.

### Сложный вариант

### 8—9 классы

11. Несколько последовательных натуральных чисел выписали в строку в таком порядке, что сумма любой тройки подряд

идущих чисел делится нацело на самое левое число этой тройки. Какое максимальное количество чисел могло быть выписано, если последнее число строки — нечетное?

*А. Шаповалов*

Сравните с задачей 17.

12. Пусть  $ABC$  — остроугольный треугольник,  $C'$  и  $A'$  — произвольные точки на сторонах  $AB$  и  $BC$  соответственно,  $B'$  — середина стороны  $AC$ .

а) Докажите, что площадь треугольника  $A'B'C'$  не больше половины площади треугольника  $ABC$ .

б) Докажите, что площадь треугольника  $A'B'C'$  равна четверти площади треугольника  $ABC$  тогда и только тогда, когда хотя бы одна из точек  $A'$ ,  $C'$  совпадает с серединой соответствующей стороны.

*Е. Черепанов*

13. См. задачу 20 а).

14. а) На каждом из полей верхней и нижней горизонтали шахматной доски  $8 \times 8$  стоит по фишке: внизу — белые, сверху — черные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все черные фишки стояли внизу, а белые — сверху?

б) Тот же вопрос для доски  $7 \times 7$ .

*А. Шаповалов*

Сравните с задачей XXVI.27.

15. Неутомимые Фома и Ерема строят последовательность. Сначала в последовательности одно натуральное число. Затем они по очереди выписывают числа: Фома получает очередное число, прибавляя к предыдущему любую из его цифр, а Ерема — вычитая из предыдущего любую из его цифр. Докажите, что какое-то число в этой последовательности повторится не меньше 100 раз.

*А. Шаповалов*

16. Внутри прямоугольного листа бумаги вырезали  $n$  прямоугольных дыр со сторонами, параллельными краям листа. На какое наименьшее число прямоугольных частей можно гарантированно разрезать этот дырявый лист?

*А. Шаповалов*

**10—11 классы**

**17.** При каких  $n$  можно расставить целые числа от 1 до  $n$  по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел делилась нацело на следующее за ними по часовой стрелке?

*А. Шаповалов*

Сравните с задачей 11. (Сравните также с задачей Х.32.)

**18.** На прямоугольном листе бумаги отмечены

а) несколько точек на одной прямой;

б) три точки.

Разрешается сложить лист бумаги несколько раз по прямой так, чтобы отмеченные точки не попали на линии сгиба, и затем шилом проколоть сложенный лист насквозь. Докажите, что можно добиться, чтобы дырки оказались в точности в отмеченных точках и лишних дырок не получилось.

*А. Шаповалов*

**19.** См. задачу 15.

**20.** Точки  $K$ ,  $L$  на сторонах  $AC$ ,  $CB$  треугольника  $ABC$  — это точки, в которых вневписанные окружности касаются сторон. Докажите, что прямая, соединяющая середины  $KL$  и  $AB$ ,

а) делит периметр треугольника  $ABC$  пополам;

б) параллельна биссектрисе угла  $ACB$ .

*Л. Емельянов*

**21. а)** Сто гирек весом в 1, 2, ..., 100 граммов разложили на две чаши весов так, что есть равновесие. Докажите, что можно убрать по две гирьки с каждой чаши так, что равновесие не нарушится.

б) Рассмотрим такие  $n$ , что набор гирь 1, 2, ...,  $n$  грамм можно разделить на две части, равные по весу. Верно ли, что для любого такого  $n$ , большего трех, можно убрать по две гирьки из каждой части так, что равенство весов сохранится?

*А. Шаповалов*

**22.** На большой шахматной доске отметили  $2n$  клеток так, что ладья может ходить по всем отмеченным клеткам, не перепрыгивая через неотмеченные.

Докажите, что фигуру из отмеченных клеток можно разрезать на  $n$  прямоугольников.

*А. Шаповалов*

23. Докажите, что у выпуклого  $10n$ -гранника найдется  $n$  граней с одинаковым числом сторон.

*А. Канель-Белов*

## Весна, 2000 год

### Базовый вариант

#### 8—9 классы

24. Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух соседних положительных четных чисел?

*В. Произволов*

25. В трапеции  $ABCD$  площади 1 основания  $BC$  и  $AD$  относятся как  $1 : 2$ . Пусть  $K$  — середина диагонали  $AC$ . Прямая  $DK$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $L$ .

Найдите площадь четырехугольника  $BCKL$ .

*М. Сонкин*

26. а) Докажите, что вершины  $3n$ -угольной призмы можно раскрасить в красный, синий и зеленый цвет так, чтобы каждая вершина была связана ребрами с вершинами всех трех цветов.

б) Докажите, что если вершины  $n$ -угольной призмы можно раскрасить тремя красками так, чтобы каждая вершина была связана ребрами с вершинами всех трех цветов, то  $n$  делится на 3.

*А. Шаповалов*

Сравните с задачей XVI.39.

27. Можно ли расставить в вершинах куба натуральные числа так, чтобы в каждой паре чисел, связанных ребром, одно из них делилось на другое, а во всех других парах такого не было?

*А. Шаповалов*

#### 10—11 классы

28. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника. Оказалось, что сумма площадей двух противоположных (имеющих только общую вершину) треугольников равна сумме площадей двух других треугольников.

Докажите, что одна из диагоналей делится другой диагональю пополам.

*Фольклор*

**29.** На двух противоположных гранях игрального кубика нарисовано по одной точке, на двух других противоположных — по две точки, и на двух оставшихся — по три точки. Из восьми таких кубиков сложили куб  $2 \times 2 \times 2$ , и посчитали суммарное число точек на каждой из его шести граней. Могло ли получиться шесть последовательных чисел?

*А. Шаповалов*

**30.** Докажите неравенство:

$$1^k + 2^k + \dots + n^k \leq \frac{n^{2k} - (n-1)^k}{n^k - (n-1)^k}$$

при любых натуральных  $n$  и  $k$ .

*Л. Емельянов*

**31.** Существует ли такая бесконечная последовательность, состоящая из

**а)** действительных чисел, **б)** целых чисел,

что сумма любых десяти подряд идущих чисел положительна, а сумма любых первых подряд идущих  $10n + 1$  чисел отрицательна?

*А. Толпыго*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

**32.** Найдите все действительные корни уравнения

$$(x+1)^{21} + (x+1)^{20}(x-1) + (x+1)^{19}(x-1)^2 + \dots + (x-1)^{21} = 0.$$

*Р. Кузнец*

**33.** Длины оснований трапеции — целые числа. Докажите, что ее можно разбить на равные треугольники.

*А. Шаповалов*

**34.** Дана окружность радиуса  $R$  и точка  $A$  внутри нее. Найдите геометрическое место вершин  $C$  всевозможных прямоугольников  $ABCD$ , где  $B$  и  $D$  — точки окружности.

*М. Панов*

**35.** Разбойники Хапок и Глазок делят кучу из 100 монет. Хапок захватывает из кучи пригоршню монет, а Глазок, глядя на пригоршню, решает, кому из двоих она достается. Так продолжается, пока кто-то из них не получит 9 пригоршней, после чего другой забирает все оставшиеся монеты (дележ может



закончиться и тем, что монеты будут разделены прежде, чем кто-то получит 9 пригоршней). Хапок может захватить в пригоршню сколько угодно монет. Какое наибольшее число монет он может гарантировать себе независимо от действий Глазка?

*А. Шаповалов*

36. Какое наибольшее число коней можно расставить на шахматной доске  $5 \times 5$  так, чтобы каждый из них бил ровно двух других?

*М. Горелов*

37. См. задачу 43 а).

#### 10—11 классы

38. Натуральные числа  $m$  и  $n$  взаимно просты. Дробь  $\frac{m + 2000n}{n + 2000m}$  можно сократить на число  $d$ . Каково наибольшее возможное значение  $d$ ?

*С. Злобин*

39. Хорды  $AC$  и  $BD$  окружности с центром  $O$  пересекаются в точке  $K$ . Точки  $M$  и  $N$  — центры окружностей, описанных около треугольников  $AKB$  и  $CKD$ . Докажите, что  $OM = KN$ .

*А. Заславский*

40. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх независимо от того, как Петя выбирает пачки. (Примечание. Если «пачка» состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз.)

*А. Шаповалов*

41. На плоскости, разграфленной сеткой вертикальных и горизонтальных прямых на квадратные клетки, нарисован выпуклый многоугольник так, что все его вершины находятся в вершинах клеток и ни одна из его сторон не вертикальна и не горизонтальна. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков сетки внутри многоугольника (обозначим ее  $S_1$ ) равна сумме длин  $S_2$  горизонтальных отрезков сетки внутри многоугольника.

*Г. Гальперин*

42. Найдите максимальное число  $N$ , для которого существуют такие  $N$  последовательных целых положительных чисел, что сумма цифр первого числа  $\zeta(1)$  делится нацело на 1, сумма цифр второго числа  $\zeta(2)$  — на двойку, сумма цифр третьего числа — на тройку, и т. д., сумма цифр  $N$ -го числа  $\zeta(N)$  делится нацело на  $N$ .

*С. Токарев*

43. В круговом шахматном турнире каждый участник играет с каждым один раз. За выигрыш присуждается одно очко, за ничью — пол-очка, за проигрыш — нуль. Назовем партию неправильной, если выигравший ее шахматист в итоге набрал очков меньше, чем проигравший.

а) Докажите, что неправильные партии составляют меньше  $3/4$  общего числа партий в турнире.

б) Докажите, что в пункте а) число  $3/4$  нельзя заменить на меньшее.

*С. Токарев*

# XXII Турнир городов (2000/01)

Осень, 2000 год

Базовый вариант

## 8—9 классы

1. В клетках таблицы  $4 \times 4$  записаны числа так, что сумма соседей у каждого числа равна 1 (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону). Найдите сумму всех чисел таблицы.

*Р. Женодаров*

2. Дано:  $ABCD$  — параллелограмм,  $M$  — середина стороны  $CD$ ,  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из вершины  $B$  на прямую  $AM$ . Докажите, что треугольник  $BCH$  — равнобедренный.

*М. Волчкевич*

3. а) На доске выписано 100 различных чисел. Докажите, что среди них можно выбрать 8 чисел так, чтобы их среднее арифметическое не представлялось в виде среднего арифметического никаких 9 из выписанных на доске чисел.

б) На доске выписано 100 целых чисел. Известно, что для любых восьми из этих чисел найдутся такие девять из этих чисел, что среднее арифметическое этих восьми чисел равно среднему арифметическому этих девяти чисел. Докажите, что все числа равны.

*А. Шаповалов*

4. См. задачу 8, только пункт а).

## 10—11 классы

5. Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Через точку  $A$  проведены хорды, пересекающие сторону  $BC$  в точках  $K$  и  $L$  и дугу  $BC$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что если вокруг четырехугольника  $KLNM$  можно описать окружность, то треугольник  $ABC$  — равнобедренный.

*В. Жгун*

6. Натуральные числа  $a, b, c, d$  таковы, что  $ad - bc > 1$ . Докажите, что хотя бы одно из чисел  $a, b, c, d$  не делится на  $ad - bc$ .

*А. Спивак*

7. В каждой боковой грани пятиугольной призмы есть угол  $\alpha$  (среди углов этой грани). Найдите все возможные значения  $\alpha$ .

*А. Шаповалов*

8. Известно, что в наборе из

а) 32; б) 22

одинаковых по виду монет есть две фальшивые монеты, которые отличаются от остальных по весу (настоящие монеты равны по весу друг другу, и фальшивые монеты также равны по весу друг другу). Как разделить все монеты на две равные по весу кучки, сделав не более 4 взвешиваний на чашечных весах без гирь?

*А. Шаповалов*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

9. Дана таблица  $n \times n$ , в каждой клетке записано число, причем все числа в таблице различны. В каждой строке отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных столбцах. Затем в каждом столбце отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных строках. Докажите, что оба раза отметили одни и те же числа.

*В. Клепцын*

10. Между двумя параллельными прямыми  $l$  и  $l'$  расположили окружность радиуса 1, касающуюся обеих прямых, и равнобедренный треугольник  $ABC$ , основание которого  $BC$  лежит на  $l$ , а вершина  $A$  — на  $l'$ . Известно, что треугольник и окружность имеют ровно одну общую точку  $K$ , которая лежит на вписанной окружности треугольника. Найдите радиус вписанной окружности треугольника.

*Р. Гордин*

11. Натуральные числа  $a, b, c, d$  таковы, что наименьшее общее кратное этих чисел равно  $a + b + c + d$ . Докажите, что  $abcd$  делится на 3 или на 5 (или на то и другое).

*В. Сендеров*

12. Рассматривается шахматная доска  $8 \times 8$ , клетки которой пока не окрашены. Сколькими способами можно раскрасить доску

в черный и белый цвета так, чтобы на доске была ровно 31 черная клетка и никакие две черные клетки не имели общей стороны?

*Р. Женодаров*

13. На правой чаше чашечных весов лежит груз 11 111 г. Весовщик последовательно раскладывает по чашам гири, первая из которых имеет массу 1 г, а каждая последующая вдвое тяжелее предыдущей. В какой-то момент весы оказались в равновесии. На какую чашу поставлена гиря 16 г?

*А. Калинин*

14. В весеннем туре турнира городов 2000 года старшеклассникам страны  $N$  было предложено 6 задач. Каждую задачу решили ровно 1000 школьников, но никакие два школьника не решили вместе все 6 задач. Каково наименьшее возможное число старшеклассников страны  $N$ , принявших участие в весеннем туре?

*Р. Женодаров*

15. У первоклассника имеется двести карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 200, а также большой запас знаков «+» и «=». Какое наибольшее число верных равенств он может составить? (Каждая карточка используется не более одного раза, в каждом равенстве может быть только один знак «=», переворачивать карточки и прикладывать их для получения новых чисел нельзя.)

*Р. Женодаров*

## 10—11 классы

16. См. задачу 11.

17. Для какого наибольшего  $n$  можно выбрать на поверхности куба  $n$  точек так, чтобы не все они лежали в одной грани куба и при этом были вершинами правильного (плоского)  $n$ -угольника?

*А. Шаповалов*

18. Длины сторон треугольника  $ABC$  равны  $a$ ,  $b$  и  $c$  ( $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$  и  $a < b < c$ ). На лучах  $BC$  и  $AC$  соответственно отмечены точки  $B_1$  и  $A_1$  такие, что  $BB_1 = AA_1 = c$ . На лучах  $CA$  и  $BA$  соответственно отмечены такие точки  $C_2$  и  $B_2$ , что  $CC_2 = BB_2 = a$ . Найдите отношение отрезка  $A_1B_1$  к отрезку  $C_2B_2$ .

*А. Шаповалов*

19. Пусть целые ненулевые числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  таковы, что равенство

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{x}}}} = x$$

выполнено при всех значениях  $x$ , входящих в область определения дроби, стоящей в левой части.

а) Докажите, что число  $n$  четно.

б) При каком наименьшем  $n$  такие числа существуют?

*М. Скопенков*

20. Клетки доски  $m \times n$  покрашены в два цвета. Известно, что на какую бы клетку ни поставить ладью, она будет бить больше клеток не того цвета, на котором стоит (клетка под ладьей тоже считается побитой). Докажите, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали клеток обоих цветов поровну.

*А. Шаповалов*

21. а) Несколько черных квадратов со стороной 1 см прибиты к белой плоскости одним гвоздем толщины 1 мм. Образовалась многоугольная черная фигура. Может ли периметр этой фигуры быть больше, чем 1 км? (Гвоздь не задевает границ квадратов.)

б) Та же задача, но гвоздь имеет толщину 0 (т.е. точка).

в) Несколько черных квадратов со стороной 1 лежат на белой плоскости, образуя многоугольную черную фигуру (возможно, состоящую из нескольких кусков и имеющую дырки). Может ли отношение периметра этой фигуры к ее площади быть больше 100 000?

*Венгерский фольклор, сообщила А. Губенко*

## Весна, 2001 год

### Базовый вариант

#### 8—9 классы

22. Натуральное число  $n$  разрешается заменить на число  $ab$ , если  $a + b = n$  и числа  $a$  и  $b$  натуральные. Можно ли с помощью таких замен получить из числа 22 число 2001?

*В. Клепцын*

**23.** В треугольнике одна из средних линий больше одной из медиан. Докажите, что этот треугольник тупоугольный.

*А. Шаповалов*

**24.** В магазин завезли 20 кг сыра, за ним выстроилась очередь. Отпустив сыр очередному покупателю, продавщица безошибочно подсчитывает средний вес покупки по всему проданному сыру и сообщает, на сколько человек хватит оставшегося сыра, если все будут покупать именно по этому среднему весу. Могла ли продавщица после каждого из первых 10 покупателей сообщать, что сыра хватит еще ровно на 10 человек? Если да, то сколько сыра осталось в магазине после первых 10 покупателей? (Средний вес покупки — это общий вес проданного сыра, деленный на число купивших.)

*И. Рыбников*

Сравните с задачей 27.

**25. а)** На столе лежат 5 одинаковых бумажных треугольников. Каждый разрешается сдвигать в любом направлении, не поворачивая. Верно ли, что всегда любой из этих треугольников можно накрыть четырьмя другими?

**б)** На столе лежат 5 одинаковых равносторонних бумажных треугольников. Каждый разрешается сдвигать в любом направлении, не поворачивая. Докажите, что любой из этих треугольников можно накрыть четырьмя другими.

*А. Шаповалов*

**26.** На доске размером  $15 \times 15$  клеток расставили 15 ладей, не бьющих друг друга. Затем каждую ладью передвинули ходом коня. Докажите, что теперь какие-то 2 ладьи будут бить друг друга.

*С. Берлов*

## 10—11 классы

**27.** Автобус, едущий по маршруту длиной 100 км, снабжен компьютером, показывающим прогноз времени, остающегося до прибытия в конечный пункт. Это время рассчитывается исходя из предположения, что средняя скорость автобуса на оставшемся участке маршрута будет такой же, как и на уже пройденной его части. Спустя 40 минут после начала движения ожидаемое время до прибытия составляло 1 час и оставалось таким же еще

в течение пяти часов. Могло ли такое быть? Если да, то сколько километров проехал автобус к окончанию этих пяти часов?

*И. Рыбников*

Сравните с задачей 24.

28. Десятичная запись натурального числа  $a$  состоит из  $n$  цифр, а десятичная запись числа  $a^3$  состоит из  $m$  цифр. Может ли  $n + m$  равняться 2001?

*Г. Гальперин*

29. В треугольнике  $ABC$  точка  $X$  лежит на стороне  $AB$ , а точка  $Y$  — на стороне  $BC$ . Отрезки  $AY$  и  $CX$  пересекаются в точке  $Z$ . Известно, что  $AY = YC$  и  $AB = ZC$ . Докажите, что точки  $B$ ,  $X$ ,  $Z$  и  $Y$  лежат на одной окружности.

*Р. Женодаров*

30. Двое играют на доске  $3 \times 100$  клеток: кладут по очереди на свободные клетки доминошки  $1 \times 2$ . Первый игрок кладет доминошки, направленные вдоль доски, второй — в поперечном направлении. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Кто из играющих может обеспечить себе победу (как бы ни играл его противник) и как ему следует играть?

*В. Трушков*

31. На поверхности правильного тетраэдра с ребром 1 см отмечены 9 точек. Докажите, что среди этих точек найдутся две, расстояние между которыми (в пространстве) не превосходит 0,5 см.

*В. Произолов*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

32. В некоторой стране есть 10 % работников, чья зарплата составляет 90 % всей зарплаты, выплачиваемой в этой стране. Может ли так быть, что в каждом из регионов, на которые делится эта страна, зарплата любых 10 % работников составляет не более 11 % от всей зарплаты, выплачиваемой в этом регионе?

*М. Вялый*

33. Есть три кучки камней: в первой 51 камень, во второй — 49, а в третьей — 5. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества



камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

*В. Клепцын*

**34.** Внутри угла с вершиной  $M$  отмечена точка  $A$ . Из этой точки выпустили шар, который отразился от одной стороны угла в точке  $B$ , затем от другой стороны в точке  $C$  и вернулся в  $A$  (угол падения равен углу отражения). Докажите, что центр  $O$  окружности, описанной около треугольника  $BCM$ , лежит на прямой  $AM$ . (Шар считайте точкой.)

*А. Заславский, И. Шарыгин*

**35.** На доске нарисовали выпуклый многоугольник. В нем провели несколько диагоналей, не пересекающихся внутри него, так что он оказался разбит на треугольники. Затем возле каждой вершины записали число треугольников, примыкающих к этой вершине, после чего все диагонали стерли. Можно ли по оставшимся возле вершин числам восстановить стерты диагонали?

*С. Зайцев*

**36. а)** На две клетки шахматной доски выставляются черная и белая фишки. Разрешается по очереди передвигать их, каждым ходом сдвигая очередную фишку на любое свободное соседнее по вертикали или горизонтали поле. Могут ли на доске в результате таких ходов встретиться все возможные позиции расположения этих двух фишек, причем ровно по одному разу?

**б)** А если разрешается сдвигать фишки в любом порядке (не обязательно по очереди)?

*А. Шаповалов*

**37.** Высоты треугольника  $ABC$  —  $AN_A$ ,  $BN_B$ ,  $CH_C$ . Докажите, что треугольник с вершинами в ортоцентрах (точках пересечения высот) треугольников  $AN_BH_C$ ,  $BN_AH_C$ ,  $CH_AH_B$  равен треугольнику  $H_AH_BH_C$ .

*А. Акопян*

**38.** Леша задумал двузначное число (от 10 до 99). Гриша пытается его отгадать, называя двузначные числа. Если Гриша правильно называет число, или же одну цифру называет правильно, а в другой ошибается не более чем на единицу, то Леша отвечает «тепло»; в остальных случаях Леша отвечает «холодно». (Например, если задумано число 65, то назвав 65, 64, 66, 55 или 75, Гриша услышит в ответ «тепло», а в остальных случаях услышит «холодно».)

а) Покажите, что нет способа, при котором Гриша гарантированно узнает число, истратив 18 попыток.

б) Придумайте способ, при котором Гриша гарантированно узнает число, истратив 24 попытки (какое бы число ни задумал Леша).

в) А за 22 попытки получится?

*Фольклор (коллектив авторов)*

## 10—11 классы

39. Найдите хотя бы один такой многочлен  $P(x)$  степени 2001, что при всех  $x$  выполнено равенство  $P(x) + P(1 - x) = 1$ .

*Фольклор*

40. При подведении итогов учебного года выяснилось, что в любой группе из не менее чем 5 учеников 80 % двоек, полученных этими учениками в течение года, поставлены не более чем 20 % учеников из этой группы.

Докажите, что по крайней мере три четверти всех двоек получил один ученик.

*М. Вялый*

41. См. задачу 37.

42. Даны две таблицы  $A$  и  $B$ , в каждой  $m$  строк и  $n$  столбцов. В каждой клетке каждой таблицы записано одно из чисел 0 или 1, причем в строках таблиц числа не убывают (при движении по строке слева направо) и в столбцах таблиц числа не убывают (при движении по столбцу сверху вниз). Известно, что при любом  $k$  от 1 до  $m$  сумма чисел в верхних  $k$  строках таблицы  $A$  не меньше суммы чисел в верхних  $k$  строках таблицы  $B$ . Известно также, что всего в таблице  $A$  столько же единиц, сколько в таблице  $B$ . Докажите, что при любом  $l$  от 1 до  $n$  сумма чисел в левых  $l$  столбцах таблицы  $A$  не больше суммы чисел в левых  $l$  столбцах таблицы  $B$ .

*А. Канель-Белов*

43. Участники шахматного турнира сыграли друг с другом по одной партии. Для каждого участника было подсчитано число набранных им очков (за победу 1 очко, за ничью  $1/2$  очка, за поражение 0 очков).

а) Может ли для каждого участника сумма очков тех, у кого он выиграл, быть больше суммы очков тех, кому он проиграл?

б) Может ли для каждого участника сумма очков тех, у кого он выиграл, быть меньше суммы очков тех, кому он проиграл?

*А. Толпыго*

44. Докажите, что можно найти 2001 выпуклый многогранник в пространстве, что никакие три из них не имеют общих точек, а любые два касаются друг друга (т.е. имеют хотя бы одну общую граничную точку, но не имеют общих внутренних точек).

*А. Канель-Белов*

45. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). Ход состоит в том, что из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки.

а) Пусть на каждом следующем ходу разрешается брать шарики из той коробочки, в которую был положен последний шарик на предыдущем ходу. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

б) Пусть теперь на каждом ходу разрешается брать шарики из любой коробочки. Верно ли, что за несколько ходов из любого начального расположения шариков по коробочкам можно получить любое другое?

*В. Гуровиц*

# XXIII Турнир городов (2001/02)

Осень, 2001 год

Базовый вариант

## 8—9 классы

1. В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  на боковой стороне  $AB$  дана точка  $K$ . Через точку  $A$  провели прямую  $l$ , параллельную прямой  $KC$ , а через точку  $B$  провели прямую  $m$ , параллельную прямой  $KD$ . Докажите, что точка пересечения прямых  $l$  и  $m$  лежит на боковой стороне  $CD$ .

*В. Бугаенко*

2. Слава перемножил первые  $n$  натуральных чисел, а Валера перемножил первые  $m$  четных натуральных чисел ( $n$  и  $m$  больше 1). В результате у них получилось одно и то же число. Докажите, что хотя бы один из мальчиков ошибся.

*В. Сендеров*

3. В Колиной коллекции есть четыре царские золотые пятирублевые монеты. Коле сказали, что какие-то две из них фальшивые. Коля хочет проверить (доказать или опровергнуть), что среди монет есть ровно две фальшивые. Удастся ли ему это сделать с помощью двух взвешиваний на двухчашечных весах без гирь? (Фальшивые монеты одинаковы по весу, настоящие тоже одинаковы по весу, но фальшивые легче настоящих.)

*Н. Константинов*

Сравните с задачей 29.

4. По прямой в одном направлении на некотором расстоянии друг от друга движутся 5 одинаковых шариков, а навстречу им движутся 5 других таких же шариков. Скорости всех шариков одинаковы. При столкновении любых двух шариков они разлетаются в противоположные стороны с той же скоростью, с какой двигались до столкновения. Сколько всего столкновений произойдет между шариками?

*А. Николаев*

5. На плоскости отмечены несколько (больше трех) точек. Известно, что если выкинуть любую точку, то оставшиеся будут симметричны относительно какой-нибудь прямой. Верно ли, что все множество точек тоже симметрично относительно какой-нибудь прямой?

*А. Шаповалов*

**10—11 классы**

6. Высотой пятиугольника назовем отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины на противоположную сторону. Медианой пятиугольника назовем отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны. Известно, что длины всех высот и всех медиан некоторого пятиугольника равны одному и тому же числу. Докажите, что этот пятиугольник правильный.

*Р. Женодаров*

7. Существуют 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа (например,  $1001! + 2$ ,  $1001! + 3$ , ...,  $1001! + 1001$ ). А существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?

*Г. Гальперин*

8. См. задачу 4.

9. На квадратном торте расположены треугольные шоколадки, которые не соприкасаются между собой. Всегда ли можно разрезать торт на выпуклые многоугольники так, чтобы каждый многоугольник содержал ровно одну шоколадку — не меньше и не больше? (Торт считайте плоским квадратом.)

*А. Канель-Белов*

10. В левом нижнем углу шахматной доски, а также на соседнем сверху поле и на соседнем справа поле стоит по белой ладье. Разрешается делать ходы по обычным правилам, однако после любого хода каждая ладья должна быть под защитой какой-нибудь другой ладьи. Можно ли за несколько ходов переставить эти три ладьи так, чтобы каждая попала на поле, симметричное исходному относительно диагонали, соединяющей правый нижний и левый верхний углы доски?

*А. Шаповалов*

**Сложный вариант****8—9 классы**

11. См. задачу 19 а).

12. Окружность разделили на  $2N$  дуг, строго чередуя  $N$  красных и  $N$  синих точек. При этом любые две смежные дуги имеют различную длину и длины каждой из этих дуг равны одному из трех чисел:  $a$ ,  $b$  или  $c$ . Докажите, что  $N$ -угольник с красными вершинами и  $N$ -угольник с синими вершинами имеют равные периметры и равные площади.

*В.Произволов*

13. Дана таблица  $(n - 2) \times n$ ,  $n > 2$ , в каждой клетке которой записано целое число от 1 до  $n$ , причем в каждой строке все числа различны и в каждом столбце все числа различны. Докажите, что эту таблицу можно дополнить до квадрата  $n \times n$ , записав в каждую новую клетку какое-нибудь целое число от 1 до  $n$  так, чтобы по-прежнему в каждой строке и в каждом столбце числа были различны.

*С.Михайлов*

14. Правильный  $(2n + 1)$ -угольник разбили диагоналями на  $2n - 1$  треугольник. Докажите, что среди них по крайней мере три равнобедренных.

*Р.Женодаров*

15. Саша выставляет на пустую шахматную доску ладьи: первую — куда захочет, а каждую следующую ставит так, чтобы она побила нечетное число ранее выставленных ладей. Какое наибольшее число ладей он сможет так выставить? (Как обычно, ладьи бьют друг друга по вертикали и горизонтали и только если между ними нет других ладей.)

*А.Шаповалов*

Сравните с задачей XXVII.13.

16. В строке записано несколько чисел. Каждую секунду робот выбирает какую-либо пару рядом стоящих чисел, в которой левое число больше правого, меняет их местами и при этом умножает оба числа на 2. Докажите, что через некоторое время сделать очередную такую операцию будет невозможно.

*А.Шаповалов*

17. Известно, что число  $2^{333}$  имеет 101 цифру и начинается с 1. Сколько чисел в ряду  $2, 4, 8, 16, \dots, 2^{333}$  начинается с четверки?

*Г.Гальперин*

**10—11 классы**

**18.** На плоскости даны три красные точки, три синие точки и еще точка  $O$ . Известно, что точка  $O$  лежит и внутри треугольника с красными вершинами, и внутри треугольника с синими вершинами, причем расстояние от  $O$  до любой красной точки меньше расстояния от  $O$  до любой синей точки. Могут ли все красные и все синие точки лежать на одной и той же окружности?

*П. Кожевников*

**19. а)** Существуют ли такие натуральные числа

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100},$$

что  $\text{НОД}(a_1, a_2) > \text{НОД}(a_2, a_3) > \dots > \text{НОД}(a_{99}, a_{100})$ ?

**б)** Существуют ли такие натуральные числа

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100},$$

что  $\text{НОК}(a_1, a_2) > \text{НОК}(a_2, a_3) > \dots > \text{НОК}(a_{99}, a_{100})$ ?

*А. Шаповалов*

Задача а) давалась в 8—9, задача б) — в 10—11 классах.

**20.** Клетки шахматной доски занумерованы числами от 1 до 64 так, что соседние номера стоят в соседних (по стороне) клетках. Какова наименьшая возможная сумма номеров на диагонали?

*А. Шаповалов*

**21.** Пусть  $F_1, F_2, F_3, \dots$  — последовательность выпуклых четырехугольников, где  $F_{k+1}$  (при  $k = 1, 2, 3, \dots$ ) получается так:  $F_k$  разрезают по диагонали, одну из частей переворачивают и склеивают по линии разреза с другой частью. Какое наибольшее количество различных четырехугольников может содержать эта последовательность? (Различными считаются многоугольники, которые нельзя совместить движением.)

*И. Токарева*

Сравните с задачей XIV.12.

**22.** В бесконечной арифметической прогрессии все числа натуральны. В каждом члене прогрессии удалось подчеркнуть одну или несколько подряд идущих цифр так, что в первом члене прогрессии оказалась подчеркнута цифра 1, во втором — 2, и так далее (для любого натурального  $n$  в  $n$ -м члене прогрессии подчеркнутые цифры образовали число  $n$ ). Докажите, что разность прогрессии — это степень числа 10.

*А. Шаповалов*

**23.** В ряд стоят 23 коробочки с шариками, причем для любого числа  $n$  от 1 до 23 есть коробочка, в которой ровно  $n$  шариков. За одну операцию можно переложить в любую коробочку еще столько же шариков, сколько в ней уже есть, из какой-нибудь другой коробочки, в которой шариков больше. Всегда ли можно такими операциями добиться, чтобы в первой коробочке оказался 1 шарик, во второй — 2 шарика, и так далее, в 23-й — 23 шарика?

*Р. Женодаров*

**24.** На координатной плоскости расположили треугольник так, что треугольники — результаты его сдвигов на векторы с целочисленными координатами — не перекрываются.

а) Может ли площадь такого треугольника быть больше  $1/2$ ?

б) Найдите наибольшую возможную площадь такого треугольника.

*Е. Черепанов*

## Весна, 2002 год

### Базовый вариант

#### 8—9 классы

**25.** Имеется много одинаковых прямоугольных картонок размером  $a \times b$  см, где  $a$  и  $b$  — целые числа, причем  $a < b$ . Известно, что из таких картонок можно сложить и прямоугольник  $49 \times 51$  см, и прямоугольник  $99 \times 101$  см. Можно ли по этим данным однозначно определить  $a$  и  $b$ ?

*С. Дориченко*

**26.** Можно ли разрезать какой-нибудь треугольник на четыре выпуклые фигуры: треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник?

*А. Заславский*

**27.** Для натуральных чисел  $x$  и  $y$  число  $x^2 + xy + y^2$  в десятичной записи оканчивается нулем. Докажите, что оно оканчивается хотя бы двумя нулями.

*В. Произволов*

**28.** Стороны  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  четырехугольника  $ABCD$  касаются некоторой окружности в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  соответственно,  $S$  — точка пересечения отрезков  $KM$  и  $LN$ . Известно, что вокруг четырехугольника  $SKBL$  можно описать окружность.



Докажите, что вокруг четырехугольника  $SNDM$  также можно описать окружность.

*А.Акопян*

**29. а)** Есть 128 монет двух различных весов, монет каждого веса поровну. Как на чашечных весах без гирь гарантированно найти две монеты разного веса не более чем за 7 взвешиваний?

**б)** Есть 8 монет двух различных весов, монет каждого веса поровну. Как на чашечных весах без гирь гарантированно найти две монеты разного веса за два взвешивания?

*А.Шаповалов*

Сравните с задачей 3.

### 10—11 классы

**30.** См. задачу 27.

**31.** Из бумаги вырезали два одинаковых треугольника  $ABC$  и  $A'B'C'$  и положили их на стол, перевернув при этом один из треугольников. Докажите, что середины отрезков  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  лежат на одной прямой.

*В.Бугаенко*

**32.** Есть шесть кусков сыра разного веса. Известно, что можно так разложить сыр на две кучки по три куска, чтобы кучки весили поровну. Как можно сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь, если про любые два куска на глаз видно, какой весит больше?

*А.Шаповалов*

**33.** Сколькими способами можно расставить числа от 1 до 100 в прямоугольнике  $2 \times 50$  так, чтобы любые два числа, различающиеся на 1, всегда попадали бы в клетки с общей стороной?

*А.Шаповалов*

**34.** Существует ли правильная треугольная призма, которую можно оклеить (без наложений) попарно различными равносторонними треугольниками? (Разрешается перегибать треугольники через ребра призмы.)

*Л.Емельянов*

Сравните с задачей XXIV.43.

## Сложный вариант

## 8—9 классы

35. Пусть  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — длины сторон треугольника. Докажите неравенство:  $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$ .

*В.Сендеров*

36. На клетчатой доске размером  $23 \times 23$  клетки стоят 4 фишки: в левом нижнем и в правом верхнем углах доски — по белой фишке, а в левом верхнем и в правом нижнем углах — по черной. Белые и черные фишки ходят по очереди, начинают белые. Каждым ходом одна из фишек сдвигается на любую соседнюю (по вертикали или горизонтали) свободную клетку. Белые фишки стремятся попасть в две соседние по вертикали или горизонтали клетки. Могут ли черные им помешать?

*Е.Зинин, П.Кожевников*

37. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  точки  $E$  и  $F$  являются серединами сторон  $BC$  и  $CD$  соответственно. Отрезки  $AE$ ,  $AF$  и  $EF$  делят четырехугольник на 4 треугольника, площади которых равны (в каком-то порядке) последовательным натуральным числам. Каково наибольшее возможное значение площади треугольника  $ABD$ ?

*С.Шестаков*

38. В ряд расположили  $n$  лампочек и зажгли некоторые из них. Каждую минуту после этого все лампочки, горевшие на прошлой минуте, гаснут, а те негоревшие лампочки, которые на прошлой минуте соседствовали ровно с одной горящей лампочкой, загораются. При каких  $n$  можно так зажечь некоторые лампочки вначале, чтобы потом в любой момент нашлась хотя бы одна горящая лампочка?

*А.Горбачев*

39. Остроугольный треугольник разрезали прямолинейным разрезом на две (не обязательно треугольные) части, затем одну из этих частей — опять на две части, и так далее: на каждом шагу выбирали любую одну из уже имеющихся частей и разрезали ее (по прямой) на две. Через несколько шагов оказалось, что исходный треугольник распался на несколько треугольников. Могут ли все они быть тупоугольными?

*Г.Гальперин*

40. В возрастающей бесконечной последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2002-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в этой последовательности каждое число, начиная с некоторого места, равно сумме всех предыдущих чисел.

*А. Шаповалов*

41. С цепочкой домино, сложенной по обычным правилам, разрешается проделывать такую операцию: выбирается кусок из нескольких подряд доминошек с одинаковыми очками на концах куска, переворачивается целиком и вставляется на то же место. Докажите, что если у двух цепочек, сложенных из двух одинаковых комплектов домино, значения очков на концах совпадают, то разрешенными операциями можно сделать порядок следования доминошек во второй цепочке таким же, как в первой.

*А. Шаповалов*

#### 10—11 классы

42. Тангенсы углов некоторого треугольника — целые числа. Найдите эти тангенсы.

*А. Заславский*

43. Верно ли, что на графике функции  $y = x^3$  можно отметить такую точку  $A$ , а на графике функции  $y = x^3 + |x| + 1$  — такую точку  $B$ , что расстояние  $AB$  не превысит  $1/100$ ?

*А. Спивак, А. Хачатурян*

44. См. задачу 40.

45. Компания зрителей купила все билеты в один ряд, но села туда наугад, причем каждый оказался не на своем месте. Билетер может поменять местами любых двух соседей, сидящих не на своих местах, и так — много раз (но не может пересаживать зрителя, уже попавшего на свое место). Верно ли, что при любой начальной рассадке билетер может действовать так, чтобы все расселись по своим местам?

*А. Шаповалов*

46. Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  — высоты остроугольного треугольника  $ABC$ ;  $O_A$ ,  $O_B$ ,  $O_C$  — центры вписанных окружностей треугольников  $AB_1C_1$ ,  $BC_1A_1$ ,  $CA_1B_1$  соответственно;  $T_A$ ,  $T_B$ ,  $T_C$  — точки касания вписанной окружности треугольника  $ABC$  сторон

$BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  соответственно. Докажите, что все стороны шестиугольника  $TAO_C T_BO_A T_CO_B$  равны.

*Л. Емельянов*

47. Колоду из 52 карт разложили в виде прямоугольника  $13 \times 4$ . Известно, что если две карты лежат рядом по вертикали или горизонтали, то они одной масти либо одного достоинства. Докажите, что в каждом горизонтальном ряду (из 13 карт) все карты одной масти.

*А. Шаповалов*

48. Существуют ли такие иррациональные числа  $a$  и  $b$ , что  $a > 1$ ,  $b > 1$ , и  $[a^m]$  отлично от  $[b^n]$  при любых натуральных числах  $m$  и  $n$ ? ( $[x]$  обозначает целую часть числа  $x$ .)

*В. Сендеров, А. Спивак*

# XXIV Турнир городов (2002/03)

Осень, 2002 год

Базовый вариант

8—9 классы

1. В выпуклом 2002-угольнике провели несколько диагоналей, не пересекающихся внутри 2002-угольника. В результате 2002-угольник разделился на 2000 треугольников. Могло ли случиться, что ровно у половины этих треугольников все стороны являются диагоналями этого 2002-угольника?

*Р. Женодаров*

2. Саша и Маша загадали по натуральному числу и сказали их Васе. Вася написал на одном листе бумаги сумму загаданных чисел, а на другом — их произведение, после чего один из листов спрятал, а другой (на нем оказалось написано число 2002) показал Саше и Маше. Увидев это число, Саша сказал, что не знает, какое число загадала Маша. Услышав это, Маша сказала, что не знает, какое число загадал Саша. Какое число загадала Маша?

*Д. Кириенко*

3. а) В классе была дана контрольная. Известно, что по крайней мере  $\frac{2}{3}$  задач этой контрольной оказались трудными: каждую такую задачу не решили по крайней мере  $\frac{2}{3}$  школьников. Известно также, что по крайней мере  $\frac{2}{3}$  школьников класса написали контрольную хорошо: каждый такой школьник решил по крайней мере  $\frac{2}{3}$  задач контрольной. Могло ли такое быть?

Изменится ли ответ в этой задаче, если заменить везде в ее условии  $\frac{2}{3}$  на:

б)  $\frac{3}{4}$ ? в)  $\frac{7}{10}$ ?

*А. Шень*

4. На столе лежат 2002 карточки с числами 1, 2, 3, ..., 2002. Двое играющих берут по одной карточке по очереди. После того как будут взяты все карточки, выигравшим считается тот, у кого больше последняя цифра суммы чисел на взятых карточках. Выясните, кто из играющих может всегда выигрывать независимо от игры противника, и объясните, как он должен при этом играть.

*М. Шаповалов*

5. Дан некоторый угол и точка  $A$  внутри угла. Можно ли провести через точку  $A$  три прямые так, чтобы на каждой из сторон угла одна из точек пересечения этих прямых со стороной лежала посередине между двумя другими точками пересечения прямых с этой же стороной?

*М. Шаповалов*

#### 10—11 классы

6. См. задачу 2.

7. См. задачу 3.

8. Несколько прямых, никакие две из которых не параллельны, разрезают плоскость на части. Внутри одной из этих частей отметили точку  $A$ . Докажите, что точка, лежащая с  $A$  по разные стороны от всех данных прямых, существует тогда и только тогда, когда часть, содержащая  $A$ , неограничена.

*А. Заславский*

9. Пусть  $x, y, z$  — любые числа из интервала  $(0; \pi/2)$ . Докажите неравенство

$$\frac{x \cdot \cos x + y \cdot \cos y + z \cdot \cos z}{x + y + z} \leq \frac{\cos x + \cos y + \cos z}{3}.$$

*В. Колосов*

10. В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдется четное число.

*А. Шаповалов*

#### Сложный вариант

#### 8—9 классы

11. В банке работают 2002 сотрудника. Все сотрудники пришли на юбилей, и их рассадили за один круглый стол. Известно, что зарплаты сидящих рядом различаются на 2 или 3 доллара. Какой наибольшей может быть разница двух зарплат сотрудников этого банка, если известно, что все зарплаты сотрудников различны?

*Р. Женодаров*

12. Все виды растений России были занумерованы подряд числами от 2 до 20 000 (числа идут без пропусков и повторений). Для каждой пары видов растений запомнили наибольший общий делитель их номеров, а сами номера были забыты (в результате сбоя компьютера). Можно ли для каждого вида растений восстановить его номер?

*А. Шаповалов*

13. Вершины 50-угольника делят окружность на 50 дуг, длины которых равны 1, 2, 3, ..., 50 в некотором порядке. Известно, что каждая пара «противоположных» дуг (соответствующих противоположным сторонам 50-угольника) отличается по длине на 25. Докажите, что у 50-угольника найдутся две параллельные стороны.

*В. Произволов*

14. Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $P$  так, что угол  $ABP$  равен углу  $ACP$ , а угол  $CBP$  равен углу  $CAP$ . Докажите, что  $P$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ .

*Р. Женодаров*

15. Выпуклый  $N$ -угольник разбит диагоналями на треугольники (при этом диагонали не пересекаются внутри многоугольника). Треугольники раскрашены в черный и белый цвета так, что любые два треугольника с общей стороной раскрашены в разные цвета. Для каждого  $N$  найдите максимум разности количества белых и количества черных треугольников.

*Р. Женодаров*

16. Имеется много карточек, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до  $n$ . Известно, что сумма чисел на всех карточках равна  $k \cdot (n!)$ , где  $k$  — целое число. Докажите, что карточки можно разложить на  $k$  групп так, чтобы в каждой группе сумма чисел, записанных на карточках, равнялась  $n!$ .

*В. Доценко*

17. Электрическая схема имеет вид решетки  $3 \times 3$ : всего в схеме 16 узлов (вершины квадратиков решетки), которые соединены проводами (стороны квадратиков решетки). Возможно, часть проводов перегорела. За одно измерение можно выбрать любую пару узлов схемы и проверить, проходит ли между ними ток (т. е. проверить, существует ли цепочка неперегоревших проводов, соединяющая эти узлы). В действительности схема такова, что ток проходит от любого узла к любому.

а) За какое наименьшее число измерений всегда можно в этом удостовериться?

б) Тот же вопрос для схемы, которая имеет вид решетки  $5 \times 5$  (всего 36 узлов).

в) Тот же вопрос для схемы, которая имеет вид решетки  $7 \times 7$  (всего 64 узла).

*А. Шаповалов*

В 8—9 классах предлагались задачи а), б); в 10—11 классах — задачи а), в).

### 10—11 классы

18. См. задачу 12.

19. Некоторый куб рассекли плоскостью так, что в сечении получился пятиугольник. Докажите, что длина одной из сторон этого пятиугольника отличается от 1 метра по крайней мере на 20 сантиметров.

*Г. Гальперин*

20. См. задачу 15.

21. См. задачу 16.

22. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $B$  проведена прямая, вторично пересекающая первую и вторую окружности в точках  $K$  и  $M$  соответственно. Прямая  $PQ$  касается первой окружности в точке  $Q$  и параллельна прямой  $AM$ , а прямая  $PR$  касается второй окружности в точке  $R$  и параллельна прямой  $AK$ . Точки  $Q$  и  $R$  лежат по разные стороны от прямой  $KM$ . Докажите, что

а) точка  $A$  принадлежит прямой  $QR$ ;

б) точка  $P$  принадлежит прямой  $KM$ .

*В. Протасов*

23. Рассмотрим последовательность, первые два члена которой равны 1 и 2 соответственно, а каждый следующий член — это наименьшее натуральное число, которое еще не встретилось в последовательности и которое не взаимно просто с предыдущим членом последовательности. Докажите, что каждое натуральное число входит в эту последовательность.

*J.C.Lagarias, E.M.Rains, N.J.A.Sloane*

24. См. задачу 17.



**Весна, 2003 год****Базовый вариант****8—9 классы**

25. По кошелькам разложили 2003 доллара, а кошельки разложили по карманам. Известно, что всего кошельков больше, чем долларов в любом кармане. Верно ли, что карманов больше, чем долларов в каком-нибудь кошельке? (Класть кошельки один в другой не разрешается.)

*А. Чеботарёв*

26. Двое играющих по очереди красят стороны  $n$ -угольника. Первый может покрасить сторону, которая граничит с 0 или 2 покрашенными сторонами, второй — сторону, которая граничит с одной покрашенной стороной. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. При каких  $n$  второй может выиграть независимо от игры первого?

*А. Шаповалов*

27. На боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  так взяты точки  $K$  и  $L$  соответственно, что  $AK + LC = KL$ . Из середины  $M$  отрезка  $KL$  провели прямую, параллельную  $BC$ , и эта прямая пересекла сторону  $AC$  в точке  $N$ . Найдите величину угла  $KNL$ .

*Р. Женодаров*

28. В последовательности натуральных чисел каждое число, кроме первого, получается прибавлением к предыдущему самой большой его цифры. Какое наибольшее количество подряд идущих чисел последовательности могло быть нечетными?

*А. Шаповалов*

29. Можно ли доминошками  $1 \times 2$ , которые разрешается располагать только горизонтально, и прямоугольниками  $1 \times 3$ , которые разрешается располагать только вертикально, замостить доску  $2003 \times 2003$ ? (Две стороны доски условно считаются горизонтальными, а две другие — вертикальными.)

*Р. Женодаров*

**10—11 классы**

30. См. задачу 25.

31. Даны 100 палочек, из которых можно сложить 100-угольник. Может ли случиться, что ни из какого меньшего числа этих палочек нельзя сложить многоугольник?

*П. Кожевников*

32. В треугольнике  $ABC$  взяли точку  $M$  так, что радиусы описанных окружностей треугольников  $AMC$ ,  $BMC$  и  $BMA$  не меньше радиуса описанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что все 4 радиуса равны.

*А. Шаповалов*

Сравните с задачей X.6.

33. Сто номерков выложили в ряд в порядке возрастания: 00, 01, 02, 03, ..., 99. Затем номерки переставили так, что каждый следующий номерок стал получаться из предыдущего увеличением или уменьшением ровно одной из цифр на 1 (например, после 29 может идти 19, 39 или 28, а 30 или 20 — не может). Каково наибольшее возможное число номерков, оставшихся на своих местах?

*А. Шаповалов*

34. Дан картонный прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $a$  см и  $b$  см, где  $b/2 < a < b$ . Докажите, что его можно разрезать на три куска, из которых можно сложить квадрат.

*Е. Поршнев*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

35. Вася пишет на доске квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  с целыми положительными коэффициентами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . После этого Петя, если хочет, может заменить один или два знака «+» на «-». Если у получившегося уравнения оба корня целые, то выигрывает Вася, если же корней нет или хотя бы один из них нецелый — Петя. Может ли Вася подобрать коэффициенты уравнения так, чтобы наверняка выиграть у Пети?

*В. Клепцын*

36. Дан треугольник  $ABC$ . Пусть  $R$  — радиус описанной окружности,  $r$  — радиус вписанной окружности,  $a$  — длина наибольшей стороны,  $h$  — длина наименьшей высоты. Докажите, что  $R/r > a/h$ .

*Г. Гальперин*

37. В турнире каждая из 15 команд сыграла с каждой другой ровно один раз.

а) Докажите, что хотя бы в одной игре встретились команды, которые перед этой игрой участвовали в сумме в нечетном числе игр этого турнира.

б) Могла ли такая игра быть единственной?

*А. Шаповалов*

38. Есть шоколадка в форме правильного треугольника со стороной  $n$ , разделенная бороздками на маленькие равные треугольнички со стороной 1 (каждая сторона разделена на  $n$  равных частей, точки деления на каждой паре сторон соединены линиями, параллельными третьей стороне). Играют двое. За ход можно отломать от шоколадки треугольный кусок (вдоль какой-нибудь бороздки), съесть его и передать остаток соседу. Тот, кто получит последний кусок — треугольничек со стороной 1, — победитель. Тот, кто не может сделать ход, досрочно проигрывает. Для каждого  $n$  выясните, кто из играющих (начинающий или его соперник) может играть так, чтобы всегда выигрывать (независимо от игры другого)?

*А. Хачатурян*

39. Какое наибольшее число клеток доски  $9 \times 9$  можно разрезать по обоим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?

*И. Акулич*

40. Трапеция с основаниями  $AD$  и  $BC$  описана вокруг окружности, пусть  $E$  — точка пересечения ее диагоналей. Докажите, что угол  $AED$  не может быть острым.

*А. Заславский*

#### 10—11 классы

41. Дана треугольная пирамида  $ABCD$ . В ней  $R$  — радиус описанной сферы,  $r$  — радиус вписанной сферы,  $a$  — длина наибольшего ребра,  $h$  — длина наименьшей высоты (опущенной на какую-то грань). Докажите, что  $R/r > a/h$ .

*Г. Гальперин*

42. Дан многочлен  $P(x)$  с действительными коэффициентами. Бесконечная последовательность различных натуральных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  такова, что  $P(a_1) = 0$ ,  $P(a_2) = a_1$ ,  $P(a_3) = a_2$ , и т. д. Какую степень может иметь  $P(x)$ ?

*Б. Френкин*

**43.** Можно ли поверхность куба оклеить без пропусков и наложений тремя треугольниками?

*П. Кожевников*

Сравните с задачей XXIII.34.

**44.** В окружность вписан прямоугольный треугольник  $ABC$  с гипотенузой  $AB$ . Пусть  $K$  — середина дуги  $BC$ , не содержащей точки  $A$ ;  $N$  — середина отрезка  $AC$ ;  $M$  — точка пересечения луча  $KN$  с окружностью. В точках  $A$  и  $C$  проведены касательные к окружности, которые пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что угол  $EMK$  прямой.

*И. Шарыгин*

**45.** Боря задумал целое число, большее 100. Кира называет целое число  $d$ , большее 1. Если Борино число делится на  $d$ , то Кира выиграла, иначе Боря вычитает из своего числа  $d$ , и игра продолжается. Называть числа, уже названные ранее, Кире запрещается. Когда Борино число станет отрицательным, Кира проигрывает. Может ли Кира действовать так, чтобы наверняка выиграть у Бори?

*А. Чеботарёв*

**46.** В каждой клетке таблицы размером  $4 \times 4$  стоит знак «+» или «-». Разрешено одновременно менять знаки на противоположные в любой клетке и во всех клетках, имеющих с ней общую сторону. Сколько разных таблиц можно получить, многократно применяя такую операцию?

*С. Токарев*

**47.** Внутри квадрата отметили несколько точек и так соединили их отрезками между собой и с вершинами квадрата, чтобы отрезки не пересекались друг с другом (нигде, кроме концов). В результате квадрат разделился на треугольники, так что все отмеченные точки оказались в вершинах треугольников, и ни одна не попала на стороны треугольников. Для каждой отмеченной точки и для каждой вершины квадрата подсчитали число проведенных из нее отрезков. Могло ли так случиться, что все эти числа оказались четными?

*А. Скопенков*

# XXV Турнир городов (2003/04)

Осень, 2003 год

Базовый вариант

## 8—9 классы

1. Каждая грань параллелепипедной коробки с ребрами 3, 4, 5 разделена на единичные квадратики. Можно ли вписать во все квадратики по числу так, чтобы сумма чисел в каждом клетчатом кольце ширины 1, опоясывающем коробку, равнялась 120?

*Г. Гальперин*

2. В семиугольнике  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$  диагонали  $A_1A_3$ ,  $A_2A_4$ ,  $A_3A_5$ ,  $A_4A_6$ ,  $A_5A_7$ ,  $A_6A_1$  и  $A_7A_2$  равны между собой. Диагонали  $A_1A_4$ ,  $A_2A_5$ ,  $A_3A_6$ ,  $A_4A_7$ ,  $A_5A_1$ ,  $A_6A_2$  и  $A_7A_3$  тоже равны между собой. Обязательно ли этот семиугольник равносторонний?

*А. Толпыго*

3. У каждого целого числа от  $n + 1$  до  $2n$  включительно (где  $n$  — натуральное) возьмем наибольший нечетный делитель и сложим все эти делители. Докажите, что получится  $n^2$ .

*Венгерский фольклор*

4. Парно соединили отрезками (каждую с каждой)  $N$  точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Часть отрезков покрасили красным цветом, остальные — синим. Красные отрезки образовали замкнутую несамопересекающуюся ломаную, и синие отрезки — тоже. Найдите все  $N$ , при которых это могло получиться.

*Н. Емельянов*

5. На полоске  $1 \times N$  на 25 левых полях стоят 25 шашек. Шашка может ходить на соседнюю справа свободную клетку или перепрыгнуть через соседнюю справа шашку на следующую за ней клетку (если эта клетка свободна), движение влево не разрешается. При каком наименьшем  $N$  все шашки можно переставить подряд без пробелов в обратном порядке?

*А. Шаповалов*

## 10—11 классы

6. См. задачу 3.

7. Какое наименьшее количество квадратиков  $1 \times 1$  надо нарисовать, чтобы получилось изображение квадрата  $25 \times 25$ , разделенного на 625 квадратиков  $1 \times 1$ ?

*Д. Калинин*

8. У продавца и покупателя в сумме 1999 рублей монетами и купюрами в 1, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000 рублей. Кот в мешке стоит целое число рублей, причем денег у покупателя достаточно. Докажите, что покупатель сможет купить кота, получив причитающуюся сдачу.

*А. Шаповалов*

9. На сторонах единичного квадрата как на гипотенузах построены во внешнюю сторону прямоугольные треугольники. Пусть  $A, B, C, D$  — вершины прямых углов, а  $O_1, O_2, O_3, O_4$  — центры вписанных окружностей этих треугольников. Докажите, что

- а) площадь четырехугольника  $ABCD$  не превосходит 2;
- б) площадь четырехугольника  $O_1O_2O_3O_4$  не превосходит 1.

*М. Евдокимов*

10. Бумажный тетраэдр разрезали по ребрам так, что получилась плоская развертка. Могло ли случиться, что эту развертку нельзя расположить на плоскости без наложений (в один слой)?

*С. Маркелов*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

11. Сто целых положительных чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Возможно ли, чтобы любые два из этих чисел были взаимно простыми?

*П. Кожевников*

12. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: «Я могу одновременно женить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!» Вторая сваха говорит: «А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!» Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: «В таком случае можно сделать и то, и другое!» Прав ли он?

*А. Эвнин*

13. Найдите все натуральные числа  $k$ , для которых найдутся такие натуральные числа  $m$  и  $n$ , что  $m(m+k) = n(n+1)$ .

*Б. Френкин*

14. Какое наименьшее число клеток надо отметить на доске  $15 \times 15$  так, чтобы слон, поставленный на любую клетку доски, бил не менее двух отмеченных клеток? (Считается, что слон, поставленный на отмеченную клетку, бьет эту клетку.)

*П. Кожевников*

15. Дан квадрат  $ABCD$ , внутри которого лежит точка  $O$ . Докажите, что сумма  $S$  углов  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$  и  $ODA$  отличается от  $180^\circ$  не больше, чем на  $45^\circ$ .

*Фольклор*

16. Дана коробка (прямоугольный параллелепипед), по поверхности (но не внутри) которой ползает муравей. Изначально муравей сидит в углу  $A$ . Верно ли, что среди всех точек поверхности на наибольшем расстоянии от муравья находится противоположный угол  $B$ ? (Расстоянием между точками, с точки зрения муравья, является длина кратчайшего пути между этими точками, проходящего по поверхности параллелепипеда.)

*С. Маркелов*

17. Играют двое. У первого 1000 четных карточек (2, 4, ..., ..., 2000), у второго 1001 нечетных (1, 3, ..., ..., 2001). Ходят по очереди, начинает первый. Ход состоит в следующем: игрок, чья очередь ходить, выкладывает одну из своих карточек, а другой, посмотрев на нее, выкладывает одну из своих карточек; тот, у кого число на карточке больше, записывает себе одно очко, а обе выложенные карточки выбрасываются. Всего получается 1000 ходов (и одна карточка второго не используется). Какое наибольшее число очков может гарантировать себе каждый из игроков (как бы ни играл его соперник)?

*А. Толпыго*

#### 10—11 классы

18. См. задачу 12.

19. Докажите, что любое натуральное число  $N$  можно представить в виде  $3^{u_1} \cdot 2^{v_1} + \dots + 3^{u_k} \cdot 2^{v_k}$ , где  $u_1 > u_2 > \dots > u_k \geq 0$  и  $0 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_k$  — целые числа.

*М. Гервер*

20. См. задачу 16.

21. Дан треугольник  $ABC$ . В нем  $H$  — точка пересечения высот,  $I$  — центр вписанной окружности,  $O$  — центр описанной окружности,  $K$  — точка касания вписанной окружности стороны  $BC$ . Известно, что отрезки  $IO$  и  $BC$  параллельны. Докажите, что отрезки  $AO$  и  $HK$  также параллельны.

*П. Кожевников*

22. См. задачу 17.

23. У тетраэдра  $ABCD$  сумма площадей двух граней (с общим ребром  $AB$ ) равна сумме площадей двух оставшихся граней (с общим ребром  $CD$ ). Докажите, что середины ребер  $BC$ ,  $AD$ ,  $AC$  и  $BD$  лежат в одной плоскости, причем эта плоскость содержит центр сферы, вписанной в тетраэдр  $ABCD$ .

*С. Берлов, А. Заславский, П. Кожевников*

24. а) В таблице  $m \times n$  расставлены знаки «+» и «-». За один ход разрешается поменять знаки на противоположные в любой строке или столбце. Докажите, что если таблица такими действиями не приводится к таблице из одних плюсов, то в ней есть квадрат  $2 \times 2$ , который тоже не приводится.

б) В таблице  $m \times n$  расставлены знаки «+» и «-». За один ход разрешается поменять знаки на противоположные в любой строке или столбце или на любой диагонали (угловые клетки тоже считаются диагоналями). Докажите, что если таблица такими действиями не приводится к таблице из одних плюсов, то в ней есть квадрат  $4 \times 4$ , который тоже не приводится.

*А. Быстриков*

## Весна, 2004 год

### Базовый вариант

#### 8—9 классы

25. В треугольнике  $ABC$  биссектриса угла  $A$ , серединный перпендикуляр к стороне  $AB$  и высота, опущенная из вершины  $B$ , пересекаются в одной точке. Докажите, что биссектриса угла  $A$ , серединный перпендикуляр к стороне  $AC$  и высота, опущенная из вершины  $C$ , также пересекаются в одной точке.

*П. Кожевников*



26. Найдите все натуральные  $n$ , для которых найдутся  $n$  идущих подряд натуральных чисел, сумма которых — простое число.

*Г. Гальперин*

27. а) Есть три одинаковых больших сосуда. В одном — 3 л сиропа, в другом — 20 л воды, третий — пустой. Можно выливать из одного сосуда всю жидкость в другой или в раковину. Можно выбрать два сосуда и доливать в один из них из третьего, пока уровни жидкости в выбранных сосудах не сравняются. Как получить 10 л разбавленного 30%-го сиропа?

б) То же, но воды —  $N$  л. При каких целых  $N$  можно получить 10 л разбавленного 30%-го сиропа?

*А. Шаповалов*

28. К натуральному числу  $a > 1$  приписали это же число и получили число  $b$ , делящееся на  $a^2$ . Найдите  $b/a^2$  (укажите все ответы и докажите, что других нет).

*И. Богданов*

29. См. задачу 34.

#### 10—11 классы

30. Звенья  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  ломаной  $ABCD$  равны по длине и касаются некоторой окружности с центром  $O$ . Докажите, что точка  $K$  касания этой окружности со звеном  $BC$ , точка  $O$  и точка пересечения прямых  $AC$  и  $BD$  лежат на одной прямой.

*М. Макаров*

31. См. задачу 28.

32. Периметр выпуклого четырехугольника равен 2004, одна из диагоналей равна 1001.

Может ли вторая диагональ быть равна 1? Равна 2? Равна 1001?

*А. Толпыго*

33. Известно, что среди членов некоторой арифметической прогрессии  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  есть числа  $a_1^2, a_2^2$  и  $a_3^2$ . Докажите, что эта прогрессия состоит из целых чисел.

*А. Быстриков*

Сравните с задачей XXVIII.9.

34. Два десятизначных числа назовем соседними, если они различаются только одной цифрой в каком-то из разрядов. Например, числа 1 234 567 890 и 1 234 507 890 являются соседними.

Какое наибольшее количество десятизначных чисел можно выписать, чтобы среди них не нашлись два соседних числа?

*Фольклор*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

35. Конечная арифметическая прогрессия состоит из целых чисел, и ее сумма — степень двойки. Докажите, что количество членов прогрессии — тоже степень двойки.

*М. Скопенков*

36. Какое максимальное число шашек можно расставить на доске  $8 \times 8$  так, чтобы каждая была под боем?

*Фольклор*

37. Курс акций компании «Рога и копыта» повышается или понижается каждый раз на  $n$  процентов, где  $n$  — фиксированное целое число,  $0 < n < 100$  (курс вычисляется с неограниченной точностью). Существует ли  $n$ , для которого курс акций может дважды принять одно и то же значение?

*Б. Френкин*

38. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Их общая касательная (та, которая ближе к точке  $B$ ) касается окружностей в точках  $E$  и  $F$ . Прямая  $AB$  пересекает прямую  $EF$  в точке  $M$ . На продолжении  $AM$  за точку  $M$  выбрана точка  $K$  так, что  $KM = MA$ . Прямая  $KE$  вторично пересекает окружность, содержащую точку  $E$ , в точке  $C$ . Прямая  $KF$  вторично пересекает окружность, содержащую точку  $F$ , в точке  $D$ . Докажите, что точки  $C$ ,  $D$  и  $A$  лежат на одной прямой.

*М. Макаров*

39. Имеется бильярдный стол в виде многоугольника (не обязательно выпуклого), у которого любые две соседние стороны перпендикулярны друг другу. В вершинах находятся точечные лузы, попав в которые шарик проваливается. Из вершины  $A$  с внутренним углом  $90^\circ$  вылетает точечный шарик и движется внутри многоугольника, отражаясь от сторон по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что он никогда не вернется в вершину  $A$ .

*А.Я. Канель-Белов*

Сравните с задачей 42.

40. Первоначально на доске написано число 2004!. Два игрока ходят по очереди. Игрок в свой ход вычитает из написанного числа какое-нибудь натуральное число, которое делится не более чем на 20 различных простых чисел (так, чтобы разность была неотрицательна), записывает на доске эту разность, а старое число стирает. Выигрывает тот, кто получит 0. Кто из играющих — начинающий или его соперник — может гарантировать себе победу и как ему следует играть?

*А.Я. Канель-Белов*

### 10—11 классы

41. См. задачу 37.

42. Имеется бильярдный стол в виде многоугольника (не обязательно выпуклого), у которого все углы составляют целое число градусов, а угол  $A$  — в точности 1 градус. В вершинах находятся точечные лузы, попав в которые шарик проваливается. Из вершины  $A$  вылетает точечный шарик и движется внутри многоугольника, отражаясь от сторон по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что он никогда не вернется в вершину  $A$ .

*А.Я. Канель-Белов*

Сравните с задачей 39.

43. Прямоугольная проекция треугольной пирамиды  $ABCD$  на некоторую плоскость  $P$  имеет максимально возможную площадь. Докажите, что  $P$  параллельна либо одной из граней пирамиды, либо двум скрещивающимся ребрам пирамиды.

*С.Слободник*

44. См. задачу 40.

45. На плоскости даны парабола  $y = x^2$  и окружность, имеющие ровно две общие точки:  $A$  и  $B$ . Оказалось, что касательные к окружности и к параболе в точке  $A$  совпадают. Обязательно ли тогда касательные к окружности и параболе в точке  $B$  также совпадают?

*С.Маркелов*

46. Перед экстрасенсом кладут колоду из 36 карт рубашкой вверх. Он называет масть верхней карты, после чего карту открывают, показывают ему и откладывают в сторону. После этого экстрасенс называет масть следующей карты, и т. д. Задача экстрасенса — угадать масть как можно большее число раз. На самом

деле рубашки карт несимметричны, и экстрасенс видит, в каком из двух положений лежит верхняя карта. Колода подготовлена подкупленным служащим. Служащий знает порядок карт в колоде, и хотя изменить его не может, зато может дать подсказку, располагая рубашки карт так или иначе согласно договоренности. Может ли экстрасенс с помощью такой подсказки гарантированно обеспечить угадывание масти

- а) более чем у половины карт?
- б) не менее чем у 20 карт?

*А. Шаповалов*

# XXVI Турнир городов (2004/05)

Осень, 2004 год

Базовый вариант

8—9 классы

1. Можно ли целые числа от 1 до 2004 расставить в некотором порядке так, чтобы сумма любых 10 чисел подряд делилась на 10?

*А. Шаповалов*

2. В ящике лежат 111 шариков красного, синего, зеленого и белого цветов. Если, не заглядывая в ящик, вытащить 100 шариков, то среди них обязательно найдутся 4 шарика различных цветов. Какое наименьшее число шариков нужно вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка нашлись 3 шарика различных цветов?

*Р. Женодаров*

Сравните с задачей 7.

3. Имеется несколько городов, некоторые из них соединены автобусными маршрутами (без остановок в пути). Из любого города можно проехать в любой (возможно, с пересадками). Иванов купил по одному билету на каждый маршрут (т. е. может проехать по нему один раз все равно в какую сторону). Петров купил  $n$  билетов на каждый маршрут. Иванов и Петров выехали из города  $A$ . Иванов использовал все свои билеты, новых не покупал и оказался в другом городе  $B$ . Петров некоторое время ездил по купленным билетам, оказался в городе  $X$  и не может из него выехать, не купив новый билет. Докажите, что  $X$  — это либо  $A$ , либо  $B$ .

*Б. Френкин*

4. Даны окружность и прямая, не пересекающая окружность. Как с помощью циркуля и линейки построить квадрат, две соседние вершины которого лежат на данной окружности, а две другие вершины — на данной прямой (если известно, что такой квадрат существует)?

*А. Кустарев*

5. Сколько существует разных способов разбить число 2004 на целые положительные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются приблизительно равными, если их разность не больше 1.

Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

*А. Толпыго*

### 10—11 классы

6. Три окружности проходят через точку  $X$ . Пусть  $A, B, C$  — точки их пересечения, отличные от  $X$ .  $A'$  — вторая точка пересечения прямой  $AX$  и окружности, описанной около треугольника  $BCX$ . Точки  $B'$  и  $C'$  определяются аналогично. Докажите, что треугольники  $ABC'$ ,  $AB'C$  и  $A'BC$  подобны.

*А. Заславский*

7. В ящике лежат 100 шариков белого, синего и красного цветов. Если, не заглядывая в ящик, вытащить 26 шариков, то среди них обязательно найдутся 10 шариков одинакового цвета. Какое наименьшее число шариков нужно вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка нашлись 30 шариков одинакового цвета?

*Р. Женодаров*

Сравните с задачей 2.

8. Даны два многочлена положительной степени  $P(x)$  и  $Q(x)$ , причем выполнены тождества  $P(P(x)) = Q(Q(x))$  и  $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$ . Обязательно ли тогда выполнено тождество  $P(x) = Q(x)$ ?

*Б. Френкин*

9. См. задачу 5.

10. При каких  $N$  можно числа от 1 до  $N$  расставить в другом порядке так, чтобы среднее арифметическое любой группы из двух или более подряд идущих чисел не было целым?

*А. Шаповалов*

Сравните с задачей X.32.

### Сложный вариант

### 8—9 классы

11. Назовем треугольник рациональным, если все его углы измеряются рациональным числом градусов. Назовем точку внутри треугольника рациональной, если, соединив ее отрезками с вер-

пинами, мы получим три рациональных треугольника. Докажите, что внутри любого остроугольного рационального треугольника найдутся как минимум три различные рациональные точки.

*А. Шаповалов*

12. Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  в точках  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  соответственно. Известно, что  $AA' = BB' = CC'$ . Обязательно ли треугольник  $ABC$  равнобедренный?

*А. Заславский*

13. Какое наибольшее число коней можно расставить на шахматной доске  $8 \times 8$  так, чтобы каждый бил не более семи из остальных?

*Р. Женодаров*

14. Ваня задумал два положительных числа  $x$  и  $y$ . Он записал числа  $x + y$ ,  $x - y$ ,  $xy$  и  $x/y$  и показал Пете, но не сказал, какое число какой операцией получено. Докажите, что Петя может однозначно восстановить  $x$  и  $y$ .

*Б. Френкин*

15. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $BC$  отмечена точка  $K$ . В треугольники  $ABK$  и  $ACK$  вписаны окружности, первая касается стороны  $BC$  в точке  $M$ , вторая — в точке  $N$ . Докажите, что  $BM \cdot CN > KM \cdot KN$ .

*С. Маркелов*

16. Двое —  $A$  и  $B$  — делят кусок сыра. Сначала  $A$  режет сыр на два куска, потом  $B$  — любой из кусков на два и так далее, пока не получится 5 кусков. Затем  $A$  берет себе один кусок, потом  $B$  — один из оставшихся кусков, потом снова  $A$  — и так, пока куски не закончатся. Для каждого игрока выясните, какое наибольшее количество сыра он может себе гарантировать, как бы ни играл его соперник, если всего сыра 50 фунтов.

*А. Шаповалов*

17. Пусть  $A$  и  $B$  — два прямоугольника. Из прямоугольников, равных  $A$ , сложили прямоугольник, подобный  $B$ . Докажите, что из прямоугольников, равных  $B$ , можно сложить прямоугольник, подобный  $A$ .

*А. Шаповалов*

**10—11 классы**

**18.** Функции  $f$  и  $g$  определены на всей числовой прямой и взаимно обратны. Известно, что  $f$  представляется в виде суммы:  $f(x) = kx + h(x)$ , где  $h(x)$  — периодическая функция. Докажите, что  $g$  также представляется в таком виде.

*С. Токарев*

**19.** Двое играют в следующую игру. Есть кучка камней. Первый каждым своим ходом берет 1 или 10 камней. Второй каждым своим ходом берет  $m$  или  $n$  камней. Ходят по очереди, начинает первый. Тот, кто не может сделать хода, проигрывает. Известно, что при любом начальном количестве камней первый всегда может играть так, чтобы выиграть (при любой игре второго). Какими могут быть  $m$  и  $n$ ?

*А. Марачев*

**20.** См. задачу 14.

**21.** Окружность с центром  $I$  радиуса  $r$  лежит внутри окружности с центром  $O$  радиуса  $R$ . Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников  $IAB$ , где  $AB$  — хорда большей окружности, касающаяся меньшей.

*А. Заславский*

**22.** См. задачу 17.

**23.** Дано простое число  $n$ , большее трех. Назовем треугольник разрешенным, если все его углы имеют вид  $(m \cdot 180^\circ / n)$ , где  $m$  — целое. Одинаковыми будем считать разрешенные треугольники с одинаковым набором углов (т.е. подобные). Вначале дан один разрешенный треугольник. Каждую минуту один из имеющихся треугольников разрезают на два разрешенных так, чтобы после разрезания все имеющиеся треугольники были не одинаковыми (т.е. не подобными). Спустя некоторое время оказалось, что ни один из треугольников так разрезать нельзя. Докажите, что к этому моменту среди имеющихся частей есть все возможные разрешенные треугольники.

*А. Шаповалов*

**24.** Углы  $AOB$  и  $COD$  совмещаются поворотом так, что луч  $OA$  совмещается с лучом  $OC$ , а луч  $OB$  — с  $OD$ . В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что углы  $AOE$  и  $DOF$  равны.

*И. Богданов, П. Кожевников*



**Весна, 2005 год****Базовый вариант****8—9 классы**

25. Одновременно из деревень  $A$  и  $B$  навстречу друг другу вышли Аня и Боря (их скорости постоянны, но не обязательно одинаковы). Если бы Аня вышла на 30 мин раньше, то они встретились бы на 2 км ближе к деревне  $B$ . Если бы Боря вышел на 30 мин раньше, то встреча состоялась бы ближе к деревне  $A$ . На сколько?

*Д. Калинин*

26. Пусть  $N$  — любое натуральное число. Докажите, что в десятичной записи либо числа  $N$ , либо числа  $3N$  найдется одна из цифр 1, 2, 9.

*Г. Гальперин*

27. В первом ряду шахматной доски стоят 8 одинаковых черных ферзей, а в последнем ряду — 8 одинаковых белых ферзей. За какое минимальное число ходов белые ферзи могут поменяться местами с черными? Ходят белые и черные по очереди.

*С. Токарев*

Сравните с задачей XXI.14.

28. Дан квадрат  $ABCD$ ,  $M$  и  $N$  — середины сторон  $BC$  и  $AD$  соответственно. На продолжении диагонали  $AC$  за точку  $A$  взяли точку  $K$ . Отрезок  $KM$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $L$ . Докажите, что углы  $KNA$  и  $LNA$  равны.

*А. Акопян*

29. В некотором городе все дороги идут только в одном из двух перпендикулярных друг другу направлений. Автомобилист совершил прогулку по этому городу, сделав поворотов налево ровно сто. Сколько поворотов направо он мог сделать при этом, если никакое место он не проезжал дважды и в конце прогулки вернулся назад?

*Р. Женодаров*

**10—11 классы**

30. На координатной плоскости нарисованы 4 параболы  $y = x^2 + ax + b$ , где  $a$ ,  $b$  — числовые коэффициенты. Известно, что есть ровно 4 точки пересечения, причем в каждой пересекаются ровно два графика. Докажите, что сумма наибольшей и наи-

меньшей из абсцисс точек пересечения равна сумме двух других абсцисс.

*А. Шаповалов*

**31.** Все натуральные числа выписали подряд без промежутков на бесконечную ленту: 123456789101112... Затем ленту разрезали на полоски по 7 цифр в каждой. Докажите, что любое семизначное число встретится

- а) хотя бы на одной из полосок;
- б) на бесконечном числе полосок.

*Г. Гальперин*

**32.** См. задачу 28.

**33.** См. задачу 29.

**34.** Сумма нескольких положительных чисел равна 10, а сумма квадратов этих чисел больше 20. Докажите, что сумма кубов этих чисел больше 40.

*А. Толпыго*

### Сложный вариант

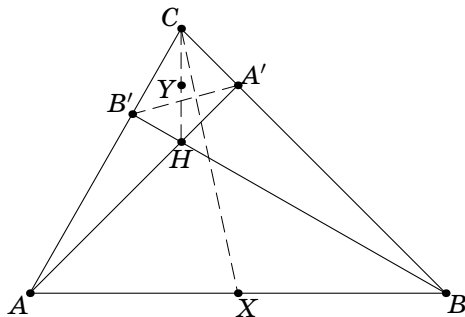
#### 8—9 классы

**35.** На графике квадратичной функции с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

*Е. Горский*

**36.** Высоты  $AA'$  и  $BB'$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Точки  $X$  и  $Y$  — середины отрезков  $AB$  и  $CH$  соответственно. Докажите, что прямые  $XY$  и  $A'B'$  перпендикулярны.

*А. Заславский*



**37.** На циферблате правильно идущих часов барона Мюнхгаузена есть только часовая, минутная и секундная стрелки, а все цифры и деления стерты. Барон утверждает, что может определять время по этим часам, поскольку, по его наблюдению, на них в течение дня (с 8:00 до 19:59) не повторяется два раза одно и то же расположение стрелок. Верно ли наблюдение барона? (Стрелки имеют различную длину, движутся равномерно.)

*А.Акопян*

**38.** Клетчатый бумажный прямоугольник  $10 \times 12$  так согнули несколько раз по линиям клеток, что получился квадратик  $1 \times 1$ . Сколько частей могло получиться после того, как этот квадратик разрезали по отрезку, соединяющему

а) середины двух его противоположных сторон;

б) середины двух его соседних сторон?

(Найдите все ответы и докажите, что других нет.)

*С.Зайцев*

**39.** Конструктор состоит из набора деталей в форме прямоугольных параллелепипедов. Все их можно поместить в одну коробку, также имеющую форму прямоугольного параллелепипеда. В бракованном наборе у каждой детали одно из ребер оказалось меньше стандартного. Можно ли утверждать, что у коробки, в которую складывается набор, тоже можно уменьшить одно из ребер? (Детали укладываются в коробку так, что их ребра параллельны ребрам коробки.)

*А.Шаповалов*

**40.** Фома и Ерема делят кучу из 25 монет в 1, 2, 3, ..., 25 алтынов. На каждом ходу один из них выбирает монету из кучи, а другой говорит, кому ее отдать. Первый раз выбирает Фома, далее тот, у кого сейчас больше алтынов, при равенстве — тот же, кто в прошлый раз. Может ли Фома действовать так, чтобы в итоге обязательно получить больше алтынов, чем Ерема, или Ерема всегда сможет Фоме помешать?

*А.Шаповалов*

**41.** Клетки шахматной доски  $8 \times 8$  занумерованы по диагоналям, идущим влево вниз, начиная с верхнего левого угла: 1; следующая диагональ — 2, 3; следующая — 4, 5, 6; и так далее (предпоследняя диагональ — 62, 63; последняя — 64). Петя расставил на доске 8 фишек так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось по одной фишке. Затем он переставил фишки

так, чтобы каждая фишка попала на клетку с бóльшим номером. Могло ли по-прежнему в каждой строке и в каждом столбце оказаться по одной фишке?

*Б. Френкин*

### 10—11 классы

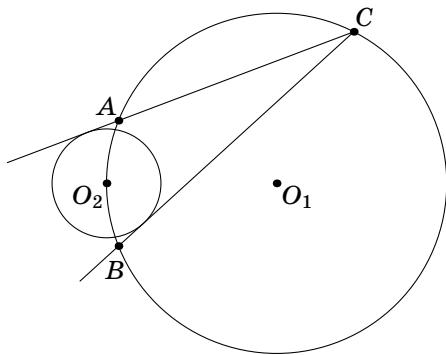
**42.** На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

*Е. Горский*

**43.** Окружность  $W_1$  проходит через центр окружности  $W_2$ . Из точки  $C$  на  $W_1$  проведены касательные к  $W_2$ , вторично пересекающие  $W_1$  в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что отрезок  $AB$  перпендикулярен прямой, проходящей через центры окружностей.

*А. Заславский*

Сравните с задачей XIII.1.



**44.** См. задачу 40.

**45.** Существует ли такой квадратный трехчлен  $f(x)$ , что для любого целого положительного  $n$  уравнение  $f(f(\dots f(x) \dots)) = 0$  ( $n$  букв « $f$ ») имеет ровно  $2^n$  различных действительных корней?

*А. Толпыго*

**46.** Икосаэдр и додекаэдр вписаны в одну и ту же сферу. Докажите, что тогда они описаны вокруг одной и той же сферы.

*Г. Гальперин*

47. Рассмотрим  $a1$  — угловую клетку шахматной доски  $8 \times 8$ ,  $b2$  — соседнюю с ней по диагонали клетку. Докажите, что число способов обойти всю доску «хромой ладьей», начиная с клетки  $a1$ , больше, чем число способов обойти всю доску «хромой ладьей», начиная с клетки  $b2$ . («Хромая ладья» ходит по доске на одну клетку по вертикали или горизонтали. Ладья должна побывать на каждой клетке доски ровно один раз.)

*И. Богданов*

48. В пространстве даны 200 точек. Каждые две из них соединены отрезком, причем отрезки не пересекаются друг с другом. Каждый отрезок покрашен в один из  $k$  цветов. Петя хочет покрасить в один из тех же цветов каждую точку так, чтобы не нашлось двух точек и отрезка между ними, окрашенных в один цвет. Всегда ли Пете это удастся, если **а)**  $k = 7$ ; **б)**  $k = 10$ ?

*С. Конягин*

# XXVII Турнир городов (2005/06)

Осень, 2005 год

Базовый вариант

8—9 классы

1. Дан треугольник  $ABC$ . Точки  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , а точки  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3$  — основания высот, лежащие на тех же сторонах. Докажите, что из отрезков  $H_1M_2$ ,  $H_2M_3$  и  $H_3M_1$  можно построить треугольник.

*Г. Гальперин*

2. В каждой вершине куба записано по числу. Вместо каждого числа записывают среднее арифметическое чисел, стоящих в трех соседних вершинах (числа заменяют одновременно). После 10 таких операций в каждой вершине оказалось исходное число. Обязательно ли все исходные числа были одинаковы?

*А. Ковальджи*

3. Отрезок единичной длины разбили на одиннадцать отрезков, длина каждого из которых не превосходит  $a$ . При каких значениях  $a$  можно утверждать, что из любых трех получившихся отрезков можно составить треугольник?

*Р. Женодаров*

4. Шахматная фигура может сдвигаться на 8 или 9 клеток по горизонтали или вертикали. Запрещается ходить на одну и ту же клетку дважды. Какое наибольшее количество клеток может обойти эта фигура на доске  $15 \times 15$ ? (Начать обход разрешается с любой клетки.)

*И. Богданов*

5. Есть 6 монет, одна из которых фальшивая (она отличается по весу от настоящей, но ее вес, как и вес настоящей монеты, неизвестен). Как за 3 взвешивания с помощью весов, показывающих общий вес взвешиваемых монет, найти фальшивую монету?

*М. Малкин*

10—11 классы

6. Можно ли уместить два точных куба между соседними точными квадратами?

*А. Толпыго*

7. Дан отрезок длины  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ . Можно ли построить циркулем и линейкой (на которой нет делений) отрезок длины 1?

*Г. Гальперин*

8. См. задачу 5.

9. На сторонах прямоугольного треугольника  $ABC$  построены во внешнюю сторону квадраты с центрами  $D, E, F$ . Докажите, что отношение площадей треугольников  $DEF$  и  $ABC$

а) больше 1; б) не меньше 2.

*В. Филимонов, И. Богданов, Ю. Кудряшов*

10. На плоскости лежал куб. Его перекатали несколько раз (через ребра) так, что куб снова оказался на исходном месте той же гранью вверх. Могла ли при этом верхняя грань повернуться на  $90^\circ$  относительно своего начального положения?

*И. Богданов*

Сравните с задачей XIX.13.

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

11. Палиндром — это натуральное число, которое читается одинаково слева направо и справа налево (например, 1, 343 и 2002 палиндромы, а 2005 — нет). Найдется ли 2005 пар вида  $(n, n + 110)$ , где оба числа — палиндромы?

*Р. Женодаров*

12. Продолжения сторон  $AB$  и  $CD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $K$ . Известно, что  $AD = BC$ . Пусть  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$ . Докажите, что треугольник  $MNK$  тупоугольный.

*И. Богданов*

13. На каждой клетке шахматной доски вначале стоит по ладье. Каждым ходом можно снять с доски ладью, которая бьет нечетное число ладей. Какое наибольшее число ладей можно снять? (Ладьи бьют друг друга, только если между ними нет других ладей.)

*А. Шаповалов*

Сравните с задачей XXIII.15.

14. По краю многоугольного стола ползут два муравья. Все стороны стола длиннее 1 м, а расстояние между муравьями всегда ровно 10 см. Сначала оба муравья находятся на одной из сторон стола.

а) Пусть стол выпуклый. Всегда ли муравьи смогут проползти по краю стола так, чтобы в каждой точке края побывал каждый из муравьев?

б) Пусть стол не обязательно выпуклый. Всегда ли муравьи смогут проползти по краю стола так, чтобы на краю не осталось точек, в которых не побывал ни один из муравьев?

*А.Акопян*

15. Найдите наибольшее натуральное число  $N$ , для которого уравнение  $99x + 100y + 101z = N$  имеет единственное решение в натуральных числах  $x, y, z$ .

*И.Богданов*

16. У Карлсона есть 1000 банок с вареньем. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой не больше, чем  $1/100$  часть всего варенья. На завтрак Карлсон может съесть поровну варенья из любых 100 банок. Докажите, что Карлсон может действовать так, чтобы за некоторое количество завтраков съесть все варенье.

*Д.Мусатов*

#### 10—11 классы

17. При каких  $n$  найдутся такие различные натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , что сумма  $a_1/a_2 + a_2/a_3 + \dots + a_n/a_1$  — целое число?

*А.Шаповалов*

18. См. задачу 14.

19. См. задачу 13.

20. На окружности расставлено несколько положительных чисел, каждое из которых не больше 1. Докажите, что можно разделить окружность на три дуги так, что суммы чисел на соседних дугах будут отличаться не больше, чем на 1. (Замечание. Если на дуге нет чисел, то сумма на ней считается равной нулю.)

*М.Малкин*

21. Дан треугольник  $ABC$ ,  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  — его биссектрисы. Известно, что величины углов  $A$ ,  $B$  и  $C$  относятся как  $4:2:1$ . Докажите, что  $A_1B_1 = A_1C_1$ .

*С.Токарев*

Сравните с задачей XXI.6.

22. На доске можно либо написать две единицы, либо стереть любые два уже написанных одинаковых числа  $n$  и написать вме-



сто них числа  $n + 1$  и  $n - 1$ . Какое минимальное количество таких операций требуется, чтобы получить число 2005?

*А. Канель-Белов*

## Весна, 2006 год

### Базовый вариант

#### 8—9 классы

**23.** В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен 60 градусам. Серединный перпендикуляр к стороне  $AB$  пересекает прямую  $AC$  в точке  $N$ . Серединный перпендикуляр к стороне  $AC$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $M$ . Докажите, что  $CB = MN$ .

*Р. Женодаров*

Сравните с задачей XXV.25.

**24.** Таблица  $n \times n$  заполнена по правилу: в клетках первого столбца записаны единицы, в клетках второго — двойки, ..., в клетках  $n$ -го —  $n$ . Числа на диагонали, соединяющей левое верхнее число с правым нижним, стерли. Докажите, что суммы чисел по разные стороны от этой диагонали отличаются ровно в два раза.

*С. Зайцев*

**25.** Дано положительное число  $a$ . Известно, что неравенство  $1 < xa < 2$  имеет ровно 3 решения в целых числах  $x$ . Сколько решений в целых числах  $x$  может иметь неравенство  $2 < xa < 3$ ? Укажите все возможности.

*А. Толпыго*

Сравните с задачей 30.

**26.** Аня, Боря и Витя сидят по кругу за столом и едят орехи. Сначала все орехи у Ани. Она делит их поровну между Борей и Витей, а остаток (если он есть) съедает. Затем все повторяется: каждый следующий (по часовой стрелке) делит имеющиеся у него орехи поровну между соседями, а остаток (если он есть) съедает. Орехов много (больше 3). Докажите, что:

- а) хотя бы один орех будет съеден;
- б) все орехи не будут съедены.

*М. Вялый*

**27.** У Пети есть  $n^3$  белых кубиков  $1 \times 1 \times 1$ . Он хочет сложить из них куб  $n \times n \times n$ , снаружи полностью белый. Какое наименьшее число граней кубиков должен Вася закрасить, чтобы помешать Пете? Решите задачу, если:

- а)  $n = 2$ ; б)  $n = 3$ ; в)  $n = 1000$ .

*Р. Женодаров*

В 8—9 классах предлагались задачи а), б), в 10—11 классах — задачи б), в).

### 10—11 классы

28. Имеется выпуклый многогранник со 100 ребрами. Все его вершины срезали плоскостями-ножами близко от самих вершин (т.е. так, чтобы плоскости-ножи не пересекались друг с другом внутри или на границе многогранника). Найдите у полученного многогранника

а) число вершин; б) число ребер.

*Г.Гальперин*

29. Найдутся ли такие функции  $p(x)$  и  $q(x)$ , что  $p(x)$  — четная функция, а  $p(q(x))$  — нечетная функция (отличная от тождественно нулевой)?

*А.Блинков, В.Гуровиц*

30. Дано положительное число  $a$ . Известно, что неравенство  $10 < a^x < 100$  имеет ровно 5 решений в натуральных числах  $x$ . Сколько решений в натуральных числах  $x$  может иметь неравенство  $100 < a^x < 1000$ ? Укажите все возможности.

*А.Толпыго*

Сравните с задачей 25.

31. Четырехугольник  $ABCD$  вписанный,  $AB = AD$ . На стороне  $BC$  взята точка  $M$ , а на стороне  $CD$  — точка  $N$  так, что  $\angle MAN = \frac{1}{2}\angle BAD$ . Докажите, что  $MN = BM + ND$ .

*М.Малкин*

32. См. задачу 27 б), в).

### Сложный вариант

### 8—9 классы

33. Бильярдный стол имеет вид прямоугольника  $2 \times 1$ , в углах и на серединах больших сторон которого расположены лузы. Какое наименьшее число шаров надо расположить внутри прямоугольника, чтобы любая луза находилась на одной линии с некоторыми двумя шарами? (Лузы и шары считайте точками.)

*Б.Френкин*

34. Докажите, что можно найти 100 таких пар целых чисел, что в десятичной записи каждого числа все цифры не меньше 6

и произведение чисел каждой пары тоже число, где все цифры не меньше 6.

*С. Токарев, А. Шаповалов*

**35.** Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . На сторонах  $AB$  и  $BC$  во внешнюю сторону построены равные прямоугольники  $ABMN$  и  $LBCK$  так, что  $AB = LB$ . Докажите, что прямые  $AL$ ,  $CM$  и  $NK$  пересекаются в одной точке.

*А. Гаврилюк*

**36.** Существует ли такое натуральное число  $n$ , что десятичная запись числа  $2^n$  начинается цифрой 5, а десятичная запись числа  $5^n$  начинается цифрой 2?

*Г. Гальперин*

**37.** В таблице  $2005 \times 2006$  расставлены числа 0, 1, 2 так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке делится на 3. Какое наибольшее возможное количество единиц может быть в этой таблице?

*И. Богданов*

**38.** Криволинейный многоугольник — это многоугольник, стороны которого — дуги окружностей. Существуют ли такой криволинейный многоугольник  $P$  и такая точка  $A$  на его границе, что любая прямая, проходящая через точку  $A$ , делит периметр многоугольника  $P$  на два куска равной длины?

*С. Маркелов*

**39.** Юра и Яша имеют по экземпляру одной и той же таблицы  $5 \times 5$ , заполненной 25 различными числами. Юра выбирает наибольшее число в таблице и вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наибольшее из оставшихся чисел, вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, и т. д. Яша производит аналогичные действия, но выбирает наименьшие числа. Может ли случиться, что сумма чисел, вычеркнутых Яшей,

а) больше суммы чисел, вычеркнутых Юрой?

б) больше суммы любых других 5 чисел исходной таблицы, удовлетворяющих условию: никакие два из них не лежат в одной строке или в одном столбце?

*С. Токарев, А. Эвнин*

## 10—11 классы

**40.** Дан выпуклый 100-угольник. Докажите, что можно отметить такие 50 точек внутри этого многоугольника, что каждая

вершина будет лежать на прямой, соединяющей какие-то две из отмеченных точек.

*Б. Френкин*

41. Существуют ли такие целые положительные числа  $n$  и  $k$ , что десятичная запись числа  $2^n$  начинается числом  $5^k$ , а десятичная запись числа  $5^n$  начинается числом  $2^k$ ?

*Г. Гальперин*

Сравните с задачей XI.8.

42. Дан многочлен  $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$ . Докажите, что любая целая положительная степень этого многочлена имеет хотя бы один отрицательный коэффициент.

*М. Малкин*

43. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AA'$ , на отрезке  $AA'$  выбрана точка  $X$ . Прямая  $BX$  пересекает  $AC$  в точке  $B'$ , а прямая  $CX$  пересекает  $AB$  в точке  $C'$ . Отрезки  $A'B'$  и  $CC'$  пересекаются в точке  $P$ , а отрезки  $A'C'$  и  $BB'$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что углы  $PAC$  и  $QAB$  равны.

*М. Волчкевич*

44. Докажите, что можно найти бесконечно много пар целых чисел, таких что в десятичной записи каждого числа все цифры не меньше 7 и произведение чисел каждой пары тоже число, где все цифры не меньше 7.

*С. Токарев*

45. На окружности сидят 12 кузнечиков в различных точках. Эти точки делят окружность на 12 дуг. По сигналу кузнечики одновременно прыгают по часовой стрелке, каждый — из конца своей дуги в ее середину. Образуются новые 12 дуг, прыжки повторяются, и т. д. Может ли хотя бы один кузнечик вернуться в свою исходную точку после того, как им сделано

а) 12 прыжков; б) 13 прыжков?

*А. Толпыго*

46. Муравей ползает по замкнутому маршруту по ребрам додекаэдра, нигде не разворачиваясь назад. Маршрут проходит ровно два раза по каждому ребру. Докажите, что некоторое ребро муравей оба раза проходит в одном и том же направлении.

*А. Шаповалов*

Сравните с задачей XX.38.

# XXVIII Турнир городов (2006/07)

Осень, 2006 год

Базовый вариант

8—9 классы

1. На доске написаны в порядке возрастания два натуральных числа  $x$  и  $y$  ( $x \leq y$ ). Петя записывает на бумажке  $x^2$  (квадрат первого числа), а затем заменяет числа на доске числами  $x$  и  $y - x$ , записывая их в порядке возрастания. С новыми числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на Петиной бумажке?

*Е. Горский*

Сравните с задачей 6.

2. Известно, что вруны всегда врут, правдивые всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Вы можете задавать вопросы, на которые есть ответ «да» или «нет» (например, верно ли, что этот человек — хитрец?).

а) Перед вами трое — врун, правдивый и хитрец, которые знают, кто из них кто. Как и вам это узнать?

б) Перед вами четверо — врун, правдивый и два хитреца (все четверо знают, кто из них кто). Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он.

*Б. Гинзбург, М. Гервер*

3. а) Написаны 2007 натуральных чисел, больших 1. Докажите, что удастся так зачеркнуть одно число, чтобы произведение оставшихся можно было представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

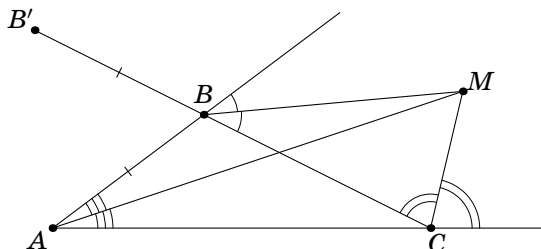
б) Написаны 2007 натуральных чисел, больших 1, одно из которых равно 2006. Оказалось, есть только одно такое число среди написанных, что произведение оставшихся представляется в виде разности квадратов двух натуральных чисел. Докажите, что это число — 2006.

*Г. Гальперин*

4. На продолжении стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  за вершину  $B$  отложен отрезок  $BB'$ , равный стороне  $AB$ . Биссектрисы

внешних углов при вершинах  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $M$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $B'$ ,  $M$  и  $C$  лежат на одной окружности.

*Р.Гордин*



5. На какое наибольшее число равных невыпуклых многоугольников можно разрезать квадрат так, чтобы все стороны многоугольников были параллельны сторонам квадрата и никакие два из этих многоугольников не получались друг из друга параллельным переносом?

*А.Шаповалов*

#### 10—11 классы

6. На доске написаны три натуральных числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Петя записывает на бумажку произведение каких-нибудь двух из этих чисел, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на Петиной бумажке?

*Е.Горский, С.Дориченко*

Сравните с задачей 1.

7. Дан описанный четырехугольник. Точки касания его вписанной окружности со сторонами последовательно соединены отрезками. В получившиеся треугольники вписаны окружности. Докажите, что диагонали четырехугольника с вершинами в центрах этих окружностей взаимно перпендикулярны.

*Р.Гордин*

8. В таблицу  $2006 \times 2006$  вписаны числа  $1, 2, 3, \dots, 2006^2$ . Докажите, что найдутся такие два числа в клетках с общей стороной или вершиной, что их сумма делится на 4.

*А.Шаповалов*

9. Даны две бесконечные (в одну сторону) прогрессии: арифметическая  $a_1, a_2, a_3, \dots$  и геометрическая  $b_1, b_2, b_3, \dots$ , причем все числа, которые встречаются среди членов геометрической прогрессии, встречаются также и среди членов арифметической прогрессии. Докажите, что знаменатель геометрической прогрессии — целое число.

*Б. Френкин*

Сравните с задачей XXV.33.

10. Можно ли вписать октаэдр в куб так, чтобы вершины октаэдра находились на ребрах куба?

*Л. Радзивилловский*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

11. Вокруг правильного семиугольника описали окружность и вписали в него окружность. То же проделали с правильным 17-угольником. В результате каждый из многоугольников оказался расположенным в своем круговом кольце. Оказалось, что площади этих колец одинаковы. Докажите, что стороны многоугольников одинаковы.

*Г. Гальперин*

12. Попав в новую компанию, Чичиков узнавал, кто с кем знаком. А чтобы запомнить это, он рисовал окружность и изображал каждого члена компании хордой, причем хорды знакомых между собой пересекались, а незнакомых — нет. Чичиков уверен, что такой набор хорд есть для любой компании. Прав ли он? (Совпадение концов хорд считается пересечением.)

*А. Шаповалов, С. Ландо*

13. Дан магический квадрат  $3 \times 3$  (сумма чисел в каждом столбце, в каждой строке и на каждой диагонали одна и та же):

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ |

Докажите, что

$$\text{а) } 2(a + c + g + i) = b + d + f + h + 4e.$$

$$\text{б) } 2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3.$$

*А. Грибалко*

Сравните с задачей XX.19.

14. В остроугольный треугольник вписана окружность радиуса  $R$ . К окружности проведены три касательные, разбивающие треугольник на три прямоугольных треугольника и шестиугольник. Периметр шестиугольника равен  $Q$ . Найдите сумму диаметров окружностей, вписанных в прямоугольные треугольники.

*Р. Гордин*

15. Оберткой плоской картины размером  $1 \times 1$  назовем прямоугольный лист бумаги площади 2, которым можно, не разрезая его, полностью обернуть картину с обеих сторон. Ясно, что прямоугольник  $2 \times 1$  и квадрат со стороной корень из двух — обертки.

а) Докажите, что есть и другие обертки.

б) Докажите, что оберток бесконечно много.

*А. Шаповалов*

16. Пусть

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n},$$

где  $a_n/b_n$  — несократимая дробь. Докажите, что существует бесконечно много натуральных  $n$ , при которых выполнено неравенство  $b_{n+1} < b_n$ .

*С. Маркелов*

17. У ведущего есть колода из 52 карт. Зрители хотят узнать, в каком порядке лежат карты (при этом не уточняя — сверху вниз или снизу вверх). Разрешается задавать ведущему вопросы вида «Сколько карт лежит между такой-то и такой-то картами?». Один из зрителей подсмотрел, в каком порядке лежат карты. Какое наименьшее число вопросов он должен задать, чтобы остальные зрители по ответам на эти вопросы могли узнать порядок карт в колоде?

*А. Шаповалов*

Сравните с задачей XVI.37.

**10—11 классы**

18. См. задачу 12.

19. На сторонах  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  остроугольного треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  так, что лучи  $A_1A$ ,  $B_1B$  и  $C_1C$  являются биссектрисами углов треугольника  $A_1B_1C_1$ . Докажите, что  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  — высоты треугольника  $ABC$ .

*Р. Гордин, П. Сергеев*



20. В числе  $a = 0,12457\dots$   $n$ -я цифра после запятой равна цифре слева от запятой в числе  $n\sqrt{2}$ . Докажите, что  $a$  — иррациональное число.

*А. Шаповалов*

21. Можно ли разбить какую-нибудь призму на непересекающиеся пирамиды, у каждой из которых основание лежит на одном из оснований призмы, а вершина — на другом основании призмы?

*С. Слободник*

22. См. задачу 16.

23. Скажем, что колода из 52 карт сложена правильно, если любая пара лежащих рядом карт совпадает по масти или достоинству, то же верно для верхней и нижней карты, и наверху лежит туз пик. Докажите, что число способов сложить колоду правильно

а) делится на  $12!$ ;

б) делится на  $13!$ .

*А. Шаповалов*

24. Положительные числа  $x_1, \dots, x_k$  удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 < \frac{x_1 + \dots + x_k}{2}, \quad x_1 + \dots + x_k < \frac{x_1^3 + \dots + x_k^3}{2}.$$

а) Докажите, что  $k > 50$ .

б) Постройте пример таких чисел для какого-нибудь  $k$ .

в) Найдите минимальное  $k$ , для которого пример возможен.

*А. Толпыго*

## Весна, 2007 год

### Базовый вариант

#### 8—9 классы

25. Пять отрезков провели (не отрывая карандаша от бумаги) так, что получилась пятиугольная звезда, разделенная проведенными отрезками на пять треугольников и пятиугольник. Оказалось, что все пять треугольников равны. Обязательно ли тогда пятиугольник правильный (т.е. равносторонний и равноугольный)?

*С. Дориченко*

26. На доске написаны два 2007-значных числа  $K$  и  $S$ . Известно, что из обоих чисел можно вычеркнуть по 7 цифр так, чтобы получились одинаковые числа. Докажите, что в исходные

числа можно вписать по 7 цифр так, чтобы тоже получились одинаковые числа.

*Р. Женодаров*

**27. а)** Какое наименьшее число ладей нужно поставить на шахматную доску  $8 \times 8$ , чтобы все белые клетки были под боем этих ладей? (Под боем ладьи считаются все клетки строки и столбца, в которых находится ладья.)

**б)** То же самое, но доска имеет размер  $9 \times 9$  (причем угловые клетки — белые).

*Р. Женодаров*

Задача а) давалась в 8–9 классах, задача б) — в 10–11 классах.

**28.** Даны три ненулевых действительных числа. Если поставить их в любом порядке в качестве коэффициентов квадратного трехчлена, то трехчлен будет иметь действительный корень. Верно ли, что любой из этих трехчленов будет иметь положительный корень?

*Б. Френкин*

**29.** Торт имеет форму треугольника. Коробка для торта имеет форму того же треугольника, но симметрична ему относительно некоторой прямой. Как разрезать торт на две части, которые можно будет (не переворачивая) уложить в эту коробку? Рассмотреть случаи:

**а)** треугольника, в котором один угол в три раза больше другого;

**б)** тупоугольного треугольника, в котором тупой угол в 2 раза больше одного из острых углов;

**в)** треугольника с углами  $20^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $130^\circ$ .

(Торт и коробку считайте плоскими фигурами.)

*М. Скопенков, И. Богданов*

В 8–9 классах давались задачи а), б), в 10–11 классах — задачи б), в).

Сравните с задачей XV.33.

### 10–11 классы

**30.** См. задачу 27.

**31.** Многочлен  $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$  имеет на интервале  $(0; 2)$  три корня. Докажите, что выполнено неравенство

$$-2 < p + q + r < 0.$$

*Р. Женодаров*

**32.** Прямая касается окружности в точке  $A$ . На прямой выбрали точку  $B$  и повернули отрезок  $AB$  на некоторый угол вокруг центра окружности, получив отрезок  $A'B'$ . Докажите, что прямая, проходящая через точки касания  $A$  и  $A'$ , делит пополам отрезок  $BB'$ .

*Р. Женодаров*

**33.** Последовательность нулей и единиц строится следующим образом: на  $k$ -м месте ставится ноль, если сумма цифр числа  $k$  четна, а иначе (если сумма цифр числа  $k$  нечетна) ставится единица. Докажите, что эта последовательность непериодична. (Вот начало этой последовательности: 101010101101010101001...)

*А. Толпыго*

**34.** См. задачу 29 б), в).

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

**35.** Дано натуральное число  $N$ . Чтобы найти целое число, ближайшее к корню квадратному из  $N$ , воспользуемся следующим способом: найдем среди квадратов натуральных чисел число  $a^2$ , ближайшее к числу  $N$ ; тогда  $a$  и будет искомым числом. Всегда ли этот способ дает правильный ответ?

*А. Хачатурян*

**36.** На сторонах единичного квадрата отметили точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  так, что  $KM$  параллельна двум сторонам квадрата, а  $LN$  параллельна двум другим сторонам квадрата. Отрезок  $KL$  отсекает от квадрата треугольник периметра 1. Треугольник какой площади отсекает от квадрата отрезок  $MN$ ?

*С. Дориченко, Р. Женодаров, С. Токарев*

**37.** Петя взял двадцать последовательных натуральных чисел, записал их друг за другом в некотором порядке и получил число  $M$ . Вася взял двадцать одно последовательное натуральное число, записал их друг за другом в некотором порядке и получил число  $N$ . Могло ли случиться, что  $M = N$ ?

*Р. Женодаров*

**38.** В выпуклом  $n$ -угольнике провели несколько диагоналей (возможно, пересекающихся) так, что ни в какой точке внутри

многоугольника не пересеклись три или более диагоналей. Оказалось, что в результате многоугольник разбился на треугольники. Каково наибольшее возможное число треугольников?

*А. Шаповалов*

**39.** Найдите все возрастающие арифметические прогрессии, состоящие из простых чисел, со свойством: количество членов прогрессии конечно и больше, чем разность прогрессии.

*Б. Френкин*

**40.** В четырехугольнике  $ABCD$  стороны  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  равны,  $M$  — середина стороны  $AD$ . Известно, что угол  $BMC$  равен  $90^\circ$ . Найдите угол между диагоналями четырехугольника  $ABCD$ .

*М. Волчкевич*

**41.** Капитан Врунгель в своей каюте разложил перетасованную колоду из 52 карт по кругу, оставив одно место свободным. Матрос Фукс с палубы, не отходя от штурвала и не зная начальной раскладки, называет карту. Если эта карта лежит рядом со свободным местом, Врунгель ее туда передвигает, не сообщая Фуку. Иначе ничего не происходит. Потом Фукс называет еще одну карту, и так сколько угодно раз, пока он не скажет «стоп».

**а)** Может ли Фукс добиться того, чтобы после «стопа» каждая карта наверняка оказалась не там, где была вначале?

**б)** Может ли Фукс добиться того, чтобы после «стопа» рядом со свободным местом наверняка не было туза пик?

*Л. Медников, А. Шаповалов*

## 10—11 классы

**42.** На параболе  $y = x^2$  взяли четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  так, что отрезки  $AB$  и  $CD$  пересеклись на оси ординат. Найдите абсциссу точки  $D$ , если абсциссы точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  равны соответственно  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

*Н. Андреев, А. Блинков*

**43.** Выпуклая фигура  $F$  обладает следующим свойством: любой правильный треугольник со стороной 1 можно параллельно перенести так, что все его вершины попадут на границу  $F$ . Следует ли из этого свойства, что  $F$  — круг?

*С. Маркелов*

44. Пусть  $f(x)$  — некоторый многочлен ненулевой степени. Может ли оказаться, что уравнение  $f(x) = a$  при любом значении  $a$  имеет четное число решений?

*П. Кожевников*

45. См. задачу 41.

46. От октаэдра со стороной 1 отрезали 6 углов — пирамидок с квадратным основанием и ребром  $1/3$ . Получился многогранник, грани которого — квадраты и правильные шестиугольники. Можно ли копиями такого многогранника замостить пространство?

*А. Канель-Белов*

47. Дано иррациональное число  $\lambda$ , такое что  $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ . По нему определяется новое число  $\lambda_1$  как меньшее из двух чисел  $2\lambda$  и  $1 - 2\lambda$ . По этому числу аналогично определяется  $\lambda_2$ , и так далее.

а) Докажите, что для некоторого  $n$  выполнено неравенство  $\lambda_n < 3/16$ .

б) Может ли случиться, что  $\lambda_n > \frac{7}{40}$  при всех натуральных  $n$ ?

*А. Толпыго*

48. Стороны треугольника  $ABC$  видны из точки  $T$  под углами  $120^\circ$ . Докажите, что прямые, симметричные прямым  $AT$ ,  $BT$  и  $CT$  относительно прямых  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно, пересекаются в одной точке.

*А. Заславский*

# XXIX Турнир городов (2007/08)

Осень, 2007 год

Базовый вариант

## 8—9 классы

1. Какое наибольшее число белых и черных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы на любой горизонтали и на любой вертикали белых фишек было ровно в два раза больше, чем черных? (Каждая фишка занимает отдельную клетку.)

*А. Шаповалов*

2. См. задачу 7 а).

3. Середина одной из сторон треугольника и основания высот, опущенных на две другие стороны, образуют равносторонний треугольник. Верно ли, что исходный треугольник тоже равносторонний?

*А. Заславский*

4. В таблицу  $29 \times 29$  вписали числа  $1, 2, 3, \dots, 29$ , каждое по 29 раз. Оказалось, что сумма чисел над диагональю в три раза больше суммы чисел под этой диагональю. Найдите число, вписанное в центральную клетку таблицы.

*А. Шаповалов*

5. См. задачу 9.

## 10—11 классы

6. Есть сто картинок, на каждой изображены взрослый и ребенок ростом поменьше (все двести человек на картинках разные). Из них надо собрать одну большую картину. Разрешается перед этим изменить масштаб каждой картинки, уменьшив ее размеры в целое число раз (масштабы разных картинок можно менять независимо друг от друга). Докажите, что можно добиться, чтобы на большой картине все взрослые были выше всех детей.

*А. Шаповалов*

7. На бумажке записаны три положительных числа:  $x$ ,  $y$  и  $1$ . За один ход разрешается записать на бумажку сумму или разность каких-нибудь двух уже записанных чисел или записать чис-

ло, обратное к какому-нибудь из уже записанных чисел. Можно ли за несколько ходов получить на бумажке число

- а)  $x^2$ ? б)  $xy$ ?

*Г. Гальперин*

8. Дана прямая и две точки  $A$  и  $B$ , лежащие по одну сторону от этой прямой на равном расстоянии от нее. Как с помощью циркуля и линейки найти на прямой такую точку  $C$ , что произведение  $AC \cdot BC$  будет наименьшим?

*А. Толпыго*

9. а) Фокусник с завязанными глазами выдает зрителю 5 карточек с номерами от 1 до 5. Зритель прячет две карточки, а остальные отдает ассистенту фокусника. Ассистент показывает зрителю две из них, и зритель называет номера этих карточек фокуснику (в том порядке, в каком захочет). После этого фокусник угадывает номера карточек, спрятанных у зрителя. Как фокуснику и ассистенту договориться, чтобы фокус всегда удавался?

- б) То же самое, но карточек 29, с номерами от 1 до 29.

*А. Толпыго, А. Шаповалов*

Вариант а) давался в 8—9 классах, вариант б) — в 10—11 классах.

10. Квадрат со стороной 1 см разрезан на три выпуклых многоугольника. Может ли случиться, что диаметр каждого из них не превосходит

- а) 1 см; б) 1,01 см; в) 1,001 см?

(Диаметром многоугольника называется максимальное расстояние между его вершинами).

*А. Толпыго*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

11. На стороне  $CD$  ромба  $ABCD$  нашлась такая точка  $K \neq C$ , что  $AD = BK$ . Пусть  $F$  — точка пересечения диагонали  $BD$  и серединного перпендикуляра к стороне  $BC$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $F$  и  $K$  лежат на одной прямой.

*Р. Женодаров*

12. а) Петя и Вася задумали по три натуральных числа. Петя для каждого из своих чисел написал на доске их наибольший общий делитель. Вася для каждого из своих чисел написал

на доске их наименьшее общее кратное. Оказалось, что Петя написал на доске те же числа, что и Вася (возможно, в другом порядке). Докажите, что все написанные на доске числа равны.

б) Останется ли верным утверждение предыдущей задачи, если Петя и Вася изначально задумают по четыре натуральных числа?

*Б. Френкин, И. Богданов*

13. Миша стоит в центре круглой лужайки радиуса 100 метров. Каждую минуту он делает шаг длиной 1 метр. Перед каждым шагом он указывает направление, в котором хочет шагнуть. Катя имеет право заставить его сменить направление на противоположное. Может ли Миша действовать так, чтобы в какой-то момент обязательно выйти с лужайки, или Катя всегда сможет ему помешать?

*А. Буфетов*

14. Дана клетчатая полоса  $1 \times N$ . Двое играют в следующую игру. На очередном ходу первый игрок ставит в одну из свободных клеток крестик, а второй — нолик. Не разрешается ставить в соседние клетки два крестика или два нолика. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выиграть (как бы ни играл его соперник)?

*Б. Френкин*

15. Дан набор из нескольких гирек, на каждой написана масса. Известно, что набор масс и набор надписей одинаковы, но, возможно, некоторые надписи перепутаны. Весы представляют из себя горизонтальный отрезок, закрепленный за середину. При взвешивании гирьки прикрепляются в произвольные точки отрезка, после чего весы остаются в равновесии либо отклоняются в ту или иную сторону. Всегда ли удастся за одно взвешивание проверить, все надписи верны или нет?

*И. Нетай, В. Шевяков*

16. См. задачу 22.

17. Володя решил стать великим писателем. Для этого он каждой букве русского языка сопоставил слово, содержащее эту букву. Потом написал слово, сопоставленное букве «А». Дальше каждую букву в нем заменил на сопоставленное ей слово (разделяя слова пробелами), потом в получившемся тексте вновь заменил каждую букву на сопоставленное ей слово, и так всего 40 раз. Володин текст начинается так: «Ряд кораблей на дремлю-



ших морях». Докажите, что этот оборот встречается в Володином тексте еще хотя бы раз.

*А. Буфетов*

### 10—11 классы

18. См. задачу 12.

19. Диагонали вписанного четырехугольника пересекаются в точке  $P$ . Пусть  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  — середины сторон четырехугольника. Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников  $PKL$ ,  $PLM$ ,  $PMN$  и  $PNK$  равны.

*А. Заславский*

20. Найдите все возрастающие арифметические прогрессии с конечным числом членов, сумма которых равна 1, и каждый член имеет вид  $1/k$ , где  $k$  — натуральное.

*А. Толпыго*

21. См. задачу 15.

22. Фокуснику завязывают глаза, а зритель выкладывает в ряд  $N$  одинаковых монет, сам выбирая, какие — вверх орлом, а какие — решкой. Ассистент фокусника просит зрителя написать на листе бумаги любое число от 1 до  $N$  и показать его всем присутствующим. Увидев число, ассистент указывает зрителю на одну из монет ряда и просит перевернуть ее. Затем фокуснику развязывают глаза, он смотрит на ряд монет и безошибочно определяет написанное зрителем число.

а) Докажите, что если у фокусника с ассистентом есть способ, позволяющий фокуснику гарантированно отгадывать число для  $N = a$ , то есть способ и для  $N = 2a$ .

б) Докажите, что если у фокусника с ассистентом есть способы, позволяющие фокуснику гарантированно отгадывать число для  $N = a$  и для  $N = b$ , то есть способ и для  $N = ab$ .

в) Найдите все значения  $N$ , для которых у фокусника с ассистентом есть способ.

*С. Грибок*

Вариант а), в) давался в 8—9 классах, вариант б), в) — в 10—11 классах.

23. На плоскости нарисованы два выпуклых многоугольника  $P$  и  $Q$ . Для любой стороны многоугольника  $P$  многоугольник  $Q$  можно зажать между двумя прямыми, параллельными

этой стороне. Обозначим через  $h$  расстояние между этими прямыми, а через  $l$  — длину стороны и вычислим произведение  $lh$ . Просуммировав такие произведения по всем сторонам  $P$ , получим некоторую величину  $(P, Q)$ . Докажите, что  $(P, Q) = (Q, P)$ .

*Д. Звонкин*

**24.** Перед Алешей 100 закрытых коробочек, в каждой-либо красный, либо синий кубик. У Алеши на счету есть рубль. Он подходит к любой закрытой коробочке, объявляет цвет и ставит любую сумму (можно нецелое число копеек, но не больше, чем у него на счету в данный момент). Коробочка открывается, и Алешин счет увеличивается или уменьшается на поставленную сумму в зависимости от того, угадан или не угадан цвет кубика. Игра продолжается, пока не будут открыты все коробочки. Какую наибольшую сумму на счету может гарантировать себе Алеша, если ему известно, что

а) синих кубиков ровно 1;

б) синих кубиков ровно  $n$ .

(Замечание. Алеша может поставить и 0, то есть просто бесплатно открыть коробочку и увидеть цвет кубика.)

*А. Буфетов*

## Весна, 2008 год

### Базовый вариант

#### 8—9 классы

**25.** В шестиугольнике  $ABCDEF$  противоположные стороны попарно параллельны ( $AB \parallel DE$ ,  $BC \parallel EF$  и  $CD \parallel FA$ ), а также  $AB = DE$ . Докажите, что  $BC = EF$  и  $CD = FA$ .

*В. Бугаенко*

**26.** На плоскости нарисовали 10 равных отрезков и отметили все их точки пересечения. Оказалось, что каждая точка пересечения делит любой проходящий через нее отрезок в отношении 3:4. Каково наибольшее возможное число отмеченных точек?

*И. Богданов*

**27.** Есть тридцать карточек, на каждой написано по числу: на десяти карточках —  $a$ , на десяти других —  $b$ , и на десяти оставшихся —  $c$  (числа  $a, b, c$  все разные). Известно, что к любым пяти карточкам можно подобрать еще пять так, что сумма чисел на

этих десяти карточках будет равна нулю. Докажите, что среди чисел  $a, b, c$  одно равно нулю.

*И. Богданов*

28. Найдите все натуральные  $n$ , при которых  $(n+1)!$  делится на сумму

$$1! + 2! + \dots + n!$$

( $k!$  — это произведение всех натуральных чисел от 1 до  $k$  включительно).

*Б. Френкин*

29. Клетки доски  $10 \times 10$  раскрашены в красный, синий и белый цвета. Любые две клетки с общей стороной раскрашены в разные цвета. Известно, что красных клеток 20.

а) Докажите, что всегда можно вырезать 30 прямоугольников, каждый из которых состоит из двух клеток — белой и синей.

б) Приведите пример раскраски, когда можно вырезать 40 таких прямоугольников.

в) Приведите пример раскраски, когда нельзя вырезать больше 30 таких прямоугольников.

*Р. Женодаров*

### 10—11 классы

30. См. задачу 27.

31. Может ли наименьшее общее кратное целых чисел 1, 2, 3, ...,  $n$  быть в 2008 раз больше, чем наименьшее общее кратное целых чисел 1, 2, 3, ...,  $m$ ?

*Б. Френкин*

32. В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  прямой,  $M$  — середина  $BC$ ,  $H$  — основание высоты из вершины  $A$ . Прямая, проходящая через точку  $M$  перпендикулярно  $AC$ , вторично пересекает описанную окружность треугольника  $AMC$  в точке  $P$ . Докажите, что отрезок  $BP$  делит отрезок  $AH$  пополам.

*В. Филимонов*

33. Даны выпуклый многоугольник и квадрат. Известно, что, как ни расположи две копии многоугольника внутри квадрата, найдется точка, принадлежащая обеим копиям. Докажите, что как ни расположи три копии многоугольника внутри квадрата, найдется точка, принадлежащая всем трем копиям.

*И. Богданов*

**34.** Дана таблица (см. рисунок). Можно в ней переставлять строки, а также можно переставлять столбцы (в любом порядке). Сколько различных таблиц можно получить таким образом из данной таблицы?

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 |

*Л. Радзивилловский*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

**35.** Число  $N$  является произведением двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что

а) можно приписать к этому числу справа две цифры так, чтобы получился точный квадрат;

б) если  $N > 12$ , это можно сделать единственным способом.

*Г. Гальперин*

**36.** На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  взята точка  $K$ , а на стороне  $BC$  — точка  $M$ . При этом оказалось, что  $KM$  параллельна  $AC$ . Отрезки  $AM$  и  $KC$  пересекаются в точке  $O$ . Известно, что  $AK = AO$  и  $KM = MC$ . Докажите, что  $AM = KB$ .

*М. Мурашкин*

**37.** Дана клетчатая полоска (шириной в одну клетку), бесконечная в обе стороны. Две клетки полоски являются ловушками, между ними —  $N$  клеток, на одной из которых сидит кузнечик. На каждом ходу мы называем натуральное число, после чего кузнечик прыгает на это число клеток влево или вправо (по своему выбору). При каких  $N$  можно называть числа так, чтобы гарантированно загнать кузнечика в одну из ловушек, где бы он ни был изначально между ловушками и как бы ни выбирал направления прыжков? (Мы все время видим, где сидит кузнечик.)

*Д. Баранов*

38. Несколько (конечное число) точек плоскости окрашены в четыре цвета, причем есть точки каждого цвета. Никакие три из этих точек не лежат на одной прямой. Докажите, что найдутся три разных (возможно, пересекающихся) треугольника, каждый из которых имеет вершины трех разных цветов и не содержит внутри себя окрашенных точек.

*М. Малкин*

39. По кругу стоят 99 детей, изначально у каждого есть мячик. Ежеминутно каждый ребенок с мячиком кидает свой мячик одному из двух соседей; при этом если два мячика попадают к одному ребенку, то один из этих мячиков теряется безвозвратно. Через какое наименьшее время у детей может остаться только один мячик?

*Р. Женодаров*

40. Существуют ли такие натуральные числа  $a, b, c, d$ , что

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1, \quad \frac{a}{d} + \frac{c}{b} = 2008?$$

*М. Мурашкин*

41. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  нет параллельных сторон. Углы, образованные сторонами четырехугольника с диагональю  $AC$ , равны (в каком-то порядке)  $16^\circ$ ,  $19^\circ$ ,  $55^\circ$  и  $55^\circ$ . Каким может быть острый угол между диагоналями  $AC$  и  $BD$ ?

*Г. Гальперин*

#### 10—11 классы

42. Бумажный треугольник, один из углов которого равен  $\alpha$ , разрезали на несколько треугольников. Могло ли случиться, что все углы всех полученных треугольников меньше  $\alpha$

а) в случае, если  $\alpha = 70^\circ$ ;

б) в случае, если  $\alpha = 80^\circ$ ?

*А. Толпыго*

43. На числовой прямой в точке  $P$  сидит точечный кузнечик. Точки 0 и 1 — ловушки. На каждом ходу мы называем любое положительное число, после чего кузнечик прыгает влево или вправо (по своему выбору) на расстояние, равное этому числу. Для каких  $P$  можно называть числа так, чтобы гарантированно загнать кузнечика в одну из ловушек? (Мы все время видим, где сидит кузнечик.)

*Д. Баранов*

44. Многочлен степени выше первой имеет  $n$  разных корней  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Его производная имеет корни  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ . Докажите неравенство

$$\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} > \frac{y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2}{n-1}.$$

*М. Мурашкин*

45. Петя и Вася нарисовали по четырехугольнику без параллельных сторон. Каждый провел в своем четырехугольнике одну из диагоналей и вычислил углы, образованные этой диагональю со сторонами своего четырехугольника. Петя получил числа  $\alpha, \alpha, \beta$  и  $\gamma$  (в некотором порядке), и Вася — тоже эти числа (возможно, в другом порядке). Докажите, что диагонали четырехугольника Пети пересекаются под теми же углами, что и диагонали четырехугольника Васи.

*Г. Гальперин*

46. Все натуральные числа выписали в ряд в некотором порядке (каждое число по одному разу). Обязательно ли найдутся несколько (больше одного) чисел, выписанных подряд (начиная с какого-то места), сумма которых будет простым числом?

*Г. Гальперин*

47. Одиннадцати мудрецам завязывают глаза и надевают каждому на голову колпак одного из 1000 цветов. После этого им глаза развязывают, и каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек — белую или черную. После этого все должны одновременно назвать цвет своих колпаков. Удастся ли это? Мудрецы могут заранее договориться о своих действиях (до того, как им завязали глаза); мудрецам известно, каких 1000 цветов могут быть колпаки.

*Д. Баранов*

48. Даны две окружности и три прямые, каждая прямая отсекает на окружностях хорды равной длины. Точки пересечения прямых образуют треугольник. Докажите, что описанная окружность этого треугольника проходит через середину отрезка между центрами данных окружностей.

*А. Заславский*

# XXX Турнир городов (2008/09)

Осень, 2008 год

Базовый вариант

## 8—9 классы

1. В 10 коробках лежат карандаши. Известно, что в разных коробках разное число карандашей, причем в каждой коробке все карандаши разных цветов. Докажите, что можно выбрать из каждой коробки по карандашу так, что все они будут разных цветов.

*П. Кожевников*

2. Даны пятьдесят различных натуральных чисел, двадцать пять из которых не превосходят 50, а остальные больше 50, но не превосходят 100. При этом никакие два из них не отличаются ровно на 50. Найдите сумму этих чисел.

*В. Произволов*

3. В окружность радиуса 2 вписан остроугольный треугольник  $A_1A_2A_3$ . Докажите, что на дугах  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_1$  можно отметить по одной точке ( $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  соответственно) так, чтобы площадь шестиугольника  $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$  численно равнялась периметру треугольника  $A_1A_2A_3$ .

*Г. Гальперин*

4. См. задачу 9.

5. Несколько спортсменов стартовали одновременно с одного и того же конца прямой беговой дорожки. Их скорости различны, но постоянны. Добежав до конца дорожки, спортсмен мгновенно разворачивается и бежит обратно, затем разворачивается на другом конце, и т. д. В какой-то момент все спортсмены снова оказались в одной точке. Докажите, что такие встречи всех будут продолжаться и впредь.

*А. Шаповалов*

## 10—11 классы

6. У Алеши есть пирожные, разложенные в несколько коробок. Алеша записал, сколько пирожных в каждой коробке. Сережа взял по одному пирожному из каждой коробки и положил их

на первый поднос. Затем он снова взял по одному пирожному из каждой непустой коробки и положил их на второй поднос — и так далее, пока все пирожные не оказались разложенными по подносам. После этого Сережа записал, сколько пирожных на каждом подносе. Докажите, что количество различных чисел среди записанных Алешей равно количеству различных чисел среди записанных Сережей.

*А. Буфетов*

**7. Решите систему уравнений ( $n > 2$ )**

$$\begin{aligned}\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 + x_3 + \dots + x_n} &= \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3 + x_4 + \dots + x_n + x_1} = \\ &= \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4 + \dots + x_n + x_1 + x_2} = \dots \\ &\dots = \sqrt{x_n} + \sqrt{x_1 + \dots + x_{n-1}},\end{aligned}$$

$$x_1 - x_2 = 1.$$

*Б. Френкин*

**8.** В окружность радиуса 2 вписан 30-угольник  $A_1A_2 \dots A_{30}$ . Докажите, что на дугах  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{30}A_1$  можно отметить по одной точке ( $B_1, B_2, \dots, B_{30}$  соответственно) так, чтобы площадь 60-угольника  $A_1B_1A_2B_2 \dots A_{30}B_{30}$  численно равнялась периметру 30-угольника  $A_1A_2 \dots A_{30}$ .

*Г. Гальперин*

**9.** Существует ли такая арифметическая прогрессия

а) из трех натуральных чисел,

б) из пяти натуральных чисел,

что произведение всех ее членов есть точная 2008-я степень натурального числа?

*Г. Гальперин*

Вариант а) давался в 8—9 классах, вариант б) — в 10—11 классах.

**10.** На клетчатом листе бумаги нарисованы несколько прямоугольников, их стороны идут по сторонам клеток. Каждый прямоугольник состоит из нечетного числа клеток, и никакие два прямоугольника не содержат общих клеток. Докажите, что эти прямоугольники можно раскрасить в 4 цвета так, чтобы у прямоугольников одного цвета не было общих точек границы.

*А. Грибалко*



## Сложный вариант

## 8—9 классы

11. На шахматной доске  $100 \times 100$  расставлено 100 не бьющих друг друга ферзей. Докажите, что в каждом угловом квадрате  $50 \times 50$  находится хотя бы один ферзь.

*А. Грибалко*

12. Есть 4 камня, каждый весит целое число граммов. Есть чашечные весы со стрелкой, показывающей, на какой из двух чаш масса больше и на сколько граммов. Можно ли узнать про все камни, сколько какой весит, за 4 взвешивания, если в одном из этих взвешиваний весы могут ошибиться на 1 грамм?

*Д. Баранов*

13. Сережа нарисовал треугольник  $ABC$  и провел в нем медиану  $AD$ . Затем он сообщил Илье, какова в этом треугольнике длина медианы  $AD$  и какова длина стороны  $AC$ . Илья, исходя из этих данных, доказал утверждение: угол  $CAB$  тупой, а угол  $DAB$  острый. Найдите отношение  $AD/AC$  (и докажите для любого треугольника с таким отношением утверждение Ильи).

*И. Богданов*

14. Барон Мюнхгаузен рассказывал, что у него есть карта страны Оз с пятью городами. Каждые два города соединены дорогой, не проходящей через другие города. Каждая дорога пересекает на карте не более одной другой дороги (и не более одного раза). Дороги обозначены желтым или красным (по цвету кирпича, которым вымощены), и при обходе вокруг каждого города (по периметру) цвета выходящих из него дорог чередуются. Могут ли слова барона быть правдой?

*А. Грибалко*

15. Даны положительные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Известно, что

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{1}{2}.$$

Докажите, что

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) < 2.$$

*С. Слободник*

16. На сторонах  $AC$  и  $BC$  неравнобедренного треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построены как на основаниях равнобедрен-

ные треугольники  $AB'C$  и  $CA'B$  с одинаковыми углами при основаниях, равными  $\varphi$ . Перпендикуляр, проведенный из вершины  $C$  к отрезку  $A'B'$ , пересекает серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$  в точке  $C_1$ . Найдите  $\angle AC_1B$ .

*А. Заславский*

17. В бесконечной последовательности  $a_1, a_2, a_3, \dots$  число  $a_1$  равно 1, а каждое следующее число  $a_n$  строится из предыдущего  $a_{n-1}$  по правилу: если у числа  $n$  наибольший нечетный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то  $a_n = a_{n-1} + 1$ , если же остаток равен 3, то  $a_n = a_{n-1} - 1$ . Докажите, что в этой последовательности

а) число 1 встречается бесконечно много раз;

б) каждое натуральное число встречается бесконечно много раз.

(Начало последовательности: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, ...)

*А. Заславский*

Вариант а), б) давался в 8—9 классах, вариант б) — в 10—11 классах.

### 10—11 классы

18. Квадратная доска разделена семью прямыми, параллельными одной стороне доски, и семью прямыми, параллельными другой стороне доски, на 64 прямоугольные клетки, которые покрашены в белый и черный цвета в шахматном порядке. Расстояния между соседними прямыми не обязательно одинаковы, поэтому клетки могут быть разных размеров. Известно, однако, что отношение площади любой белой клетки к площади любой черной клетки не больше 2. Найдите наибольшее возможное отношение суммарной площади белых клеток к суммарной площади черных.

*Ю. Чеканов*

19. Пространство разбито на одинаковые кубики. Верно ли, что для каждого из этих кубиков обязательно найдется другой, имеющий с ним общую грань?

*И. Богданов*

20. На столе лежат  $N$  кучек по одному ореху в каждой ( $N > 2$ ). Двое ходят по очереди. За ход нужно выбрать две кучки, где числа орехов взаимно просты, и объединить эти кучки в одну. Выигрывает тот, кто сделает последний ход. Для каждого  $N$  вы-

ясните, кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл его противник.

*А. Шаповалов*

21. Дана неравнобокая трапеция  $ABCD$ . Точка  $A_1$  — это точка пересечения описанной окружности треугольника  $BCD$  с прямой  $AC$ , отличная от  $C$ . Аналогично определяются точки  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ . Докажите, что  $A_1B_1C_1D_1$  — тоже трапеция.

*И. Богданов*

22. См. задачу 176).

23. Многочлен  $P(x)$  с действительными коэффициентами таков, что уравнение  $P(m) + P(n) = 0$  имеет бесконечно много решений в целых числах  $m$  и  $n$ . Докажите, что у графика  $y = P(x)$  есть центр симметрии.

*А. Шаповалов*

24. Тест состоит из 30 вопросов, на каждый есть 2 варианта ответа (один верный, другой нет). За одну попытку Витя отвечает на все вопросы, после чего ему сообщают, на сколько вопросов он ответил верно. Сможет ли Витя действовать так, чтобы гарантированно узнать все верные ответы не позже чем

а) после 29-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 30-й попытке);

б) после 24-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 25-й попытке)?

(Изначально Витя не знает ни одного ответа, тест всегда один и тот же.)

*В. Клепцын*

## Весна, 2009 год

### Базовый вариант

#### 8—9 классы

25. В выпуклом 2009-угольнике проведены все диагонали. Прямая пересекает 2009-угольник, но не проходит через его вершины. Докажите, что эта прямая пересекает четное число диагоналей.

*Г. Гальперин*

26. Пусть  $a^b$  обозначает число  $a^b$ . В выражении  $7^{7^{7^{7^{7^{7^7}}}}}$  надо расставить скобки, чтобы определить порядок действий (все-

го будет пять пар скобок). Можно ли расставить эти скобки двумя разными способами так, чтобы получилось одно и то же число?

*А. Толпыго*

27. Володя хочет сделать набор кубиков одного размера и написать на каждой грани одного кубика по одной цифре так, чтобы можно было из этих кубиков выложить любое 30-значное число. Какого наименьшего количества кубиков ему хватит? (Цифры 6 и 9 при переворачивании *не превращаются* друг в друга).

*В. Замятин*

28. Натуральное число увеличили на 10 % и снова получили натуральное число. Могла ли при этом сумма его цифр уменьшиться ровно на 10 %?

*А. Шаповалов*

29. В ромбе  $ABCD$  угол  $A$  равен  $120^\circ$ . На сторонах  $BC$  и  $CD$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что угол  $NAM$  равен  $30^\circ$ . Докажите, что центр  $O$  окружности, описанной около треугольника  $NAM$ , лежит на диагонали ромба.

*Р. Женодаров*

## 10—11 классы

30. См. задачу 26.

31. На плоскости даны несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые точки соединены отрезками. Известно, что любая прямая, не проходящая через данные точки, пересекает четное число отрезков. Докажите, что из каждой точки выходит четное число отрезков.

*И. Богданов, Г. Гальперин*

32. Для каждого натурального числа  $n$  обозначим через  $O(n)$  его наибольший нечетный делитель. Даны произвольные натуральные числа  $x_1 = a$  и  $x_2 = b$ . Построим бесконечную последовательность натуральных чисел по правилу:  $x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2})$ , где  $n = 3, 4, \dots$

а) Докажите, что начиная с некоторого места все числа в последовательности будут равны одному и тому же числу.

б) Как найти это число, зная числа  $a$  и  $b$ ?

*Г. Гальперин*

33. В ряд выписано несколько нулей и единиц. Рассмотрим пары цифр в этом ряду (не только соседних), где левая цифра рав-

на 1, а правая 0. Пусть среди этих пар ровно  $M$  таких, что между единицей и нулем этой пары стоит четное число цифр (возможно, ни одной), и ровно  $N$  — таких, что между единицей и нулем этой пары стоит нечетное число цифр. Докажите, что  $M \geq N$ .

*В. Ясинский*

34. Внутри некоторого тетраэдра взяли произвольную точку  $X$ . Через каждую вершину тетраэдра провели прямую, параллельную отрезку, соединяющему  $X$  с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что четыре полученные прямые пересекаются в одной точке.

*С. Маркелов*

### Сложный вариант

#### 8—9 классы

35. Вася и Петя играют в следующую игру. На доске написаны два числа:  $\frac{1}{2009}$  и  $\frac{1}{2008}$ . На каждом ходу Вася называет любое число  $x$ , а Петя увеличивает одно из чисел на доске (какое захочет) на  $x$ . Вася выигрывает, если в какой-то момент одно из чисел на доске станет равным 1. Сможет ли Вася выиграть, как бы ни играл Петя?

*Д. Баранов*

36. а) Докажите, что найдется многоугольник, который можно разделить отрезком на две равные части так, что этот отрезок разделит одну из сторон многоугольника пополам, а другую — в отношении 1:2.

б) Найдется ли выпуклый многоугольник с таким свойством?

*С. Маркелов*

37. В каждой клетке квадрата  $101 \times 101$ , кроме центральной, стоит один из двух знаков: «поворот» или «прямо». Шахматная фигура «машина» может въехать извне в любую клетку на границе квадрата (под прямым углом к границе). Если машина попадает в клетку со знаком «прямо», она продолжает ехать в том же направлении, что и ехала. Если попадает в клетку со знаком «поворот», то поворачивает на  $90^\circ$  в любую сторону по своему выбору. Центральную клетку квадрата занимает дом. Можно ли так расставить знаки, чтобы машина не могла попасть в дом?

*А. Чеботарев*

38. Дана бесконечная последовательность различных натуральных чисел. Известно, что каждый член этой последовательности (кроме первого) — либо среднее арифметическое, либо среднее геометрическое двух соседних с ним членов. Обязательно ли все члены этой последовательности, начиная с некоторого — только средние арифметические, либо только средние геометрические своих соседей?

*А. Перепечко*

39. Замок обнесен круговой стеной с 9 башнями, на которых дежурят рыцари. По истечении каждого часа все они переходят на соседние башни, причем каждый рыцарь движется либо все время по часовой стрелке, либо против. За ночь каждый рыцарь успевает подежурить на каждой башне. Известно, что был час, когда на каждой башне дежурили хотя бы два рыцаря, и был час, когда ровно на 5 башнях дежурило ровно по одному рыцарю. Докажите, что был час, когда на одной из башен вообще не было рыцарей.

*М. Мурашкин*

40. Угол  $C$  при вершине равнобедренного треугольника равен  $120^\circ$ . Из вершины  $C$  выпустили внутрь треугольника два луча под углом  $60^\circ$  друг к другу, которые, отразившись от основания  $AB$  (по закону «угол падения равен углу отражения»), попали на боковые стороны. В результате исходный треугольник разделился на 5 меньших треугольников. Рассмотрим те три из них, которые примыкают к стороне  $AB$ . Докажите, что площадь среднего треугольника равна сумме площадей крайних.

*В. Произолов*

41. Пусть  $C_n^k$  обозначает количество способов выбрать  $k$  предметов из  $n$  различных предметов (способы, отличающиеся только порядком выбора элементов, считаются одинаковыми). Докажите, что если натуральные числа  $k$  и  $l$  меньше  $n$ , то числа  $C_n^k$  и  $C_n^l$  имеют общий делитель, больший 1.

*Фольклор*

## 10—11 классы

42. Прямоугольник разбили на несколько меньших прямоугольников. Могло ли оказаться, что для каждой пары полученных прямоугольников отрезок, соединяющий их центры, пересекает еще какой-нибудь прямоугольник?

*М. Мурашкин*

43. См. задачу 38.

44. На каждой клетке квадрата  $10 \times 10$  стоит фишка. Разрешается выбрать диагональ, на которой стоит четное число фишек, и снять с нее любую фишку. Какое наибольшее число фишек можно убрать с доски такими операциями?

*М. Мурашкин*

45. Три плоскости разрезают параллелепипед на восемь шестигранников, все грани которых — 4-угольники (каждая плоскость пересекает свои две пары противоположных граней параллелепипеда и не пересекает оставшиеся грани). Известно, что вокруг одного из этих шестигранников можно описать сферу. Докажите, что и вокруг каждого из них можно описать сферу.

*В. Произволов*

46. См. задачу 41.

47. Дано целое число  $n > 1$ . Двое по очереди отмечают точки на окружности: первый — красным цветом, второй — синим. Когда отмечено по  $n$  точек каждого цвета, игра заканчивается. Затем каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. У кого длина дуги больше — тот выиграл (в случае равенства длины дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков — ничья). Кто из играющих может выиграть, как бы ни играл противник?

*А. Шаповалов*

48. В ячейку памяти компьютера записали число 6. Далее компьютер делает миллион шагов. На шаге номер  $n$  он увеличивает число в ячейке на наибольший общий делитель этого числа и  $n$ . Докажите, что на любом шаге компьютер увеличивает число в ячейке либо на 1, либо на простое число.

*М. Франк*

## Указания и решения



# I Турнир городов

## (Олимпиада трех городов, 1980)

**1. Указание.** Как обычно, нужно найти инвариант. В зависимости от того, ставится ли красная точка между двумя красными, двумя синими или красной и синей, допустимые преобразования делятся на три типа:  $kk \leftrightarrow sks$ ,  $ss \leftrightarrow kkk$  и  $sk \leftrightarrow kks$ .

Пусть в какой-то момент на окружности стоит  $r$  синих точек, а число красных между двумя соседними синими равно  $a_1, \dots, a_r$ . Легко видеть, что инвариантом является величина

$$a_1 - a_2 + a_3 - \dots \pm a_r \pmod{3}.$$

Остальное почти очевидно, хотя требуется еще отдельно рассмотреть случай  $r=0$ .

**2. Решение.** Составим граф, вершины которого — строки, а ребро между двумя строками — столбец, при вычеркивании которого эти две строки становятся одинаковыми (такой столбец может быть только один).

Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда каждому столбцу соответствует хотя бы одно ребро (а может быть, и несколько), так что в графе ребер не меньше, чем вершин. Поэтому в графе есть цикл; можно считать, что он состоит из номеров  $1, 2, \dots, k$ . Пусть первой и второй строкам соответствует первый столбец (т.е. они различаются только на 1-м месте), второй и третьей — второй столбец, и т.д., пока цикл не замкнется, т.е.  $k$ -й и первой строкам соответствует  $k$ -й столбец. Но это противоречит тому, что  $k$ -я и первая строки различаются на первом месте (первая отлична от второй, а следующие совпадают со второй).

**3. Указание.** Произведение всех дробей  $a_k/k$  равно 102. Поэтому дело сводится к тому, чтобы перечислить все разложения числа 102 на натуральные множители, а затем выяснить, как именно можно расставить эти сомножители на места  $1, 2, \dots, 101$ .  
**Ответ.** Всего имеется 13 подходящих перестановок.

**4. Решение.** Пусть все векторы имеют длину 1, т.е. их концы располагаются на единичной сфере. Опишем вокруг каждого из концов  $A_i$  окружность (на сфере) с таким расчетом, чтобы угол между векторами, направленными из центра сферы в точку  $A_i$  и в произвольную точку на этой окружности, составлял

$45^\circ/2 = 22^\circ 30'$ . Эти окружности ограничивают круги (плоские) и части сферы («шапочки» над этими кругами), причем площадь «шапочек», очевидно, больше. Вместе с тем даже площадь плоских кругов, как нетрудно проверить, больше площади сферы. Следовательно, какие-то «шапочки» пересекаются. Отсюда сразу следует нужное утверждение.

**5. План решения.** 1. Доказать лемму: если в произвольном выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  стороны  $AB$  и  $CD$  разбиты соответственно точками  $K, L$  в отношении  $a:b$ , а стороны  $BC$  и  $DA$  — соответственно точками  $M, N$  в отношении  $c:d$ , то отрезки  $MN$  и  $KL$  делятся в точке своего пересечения в тех же отношениях.

2. Доказать утверждение задачи для  $K=2$ .

3. Свести общий случай к случаю  $K=2$ .

**6. Решение.** Пусть  $a_i$  — наши фигуры. Их суммарная площадь  $\sum S_i$  равна 1, а суммарный периметр  $\sum P_i$  равен 40. Легко видеть, что  $\sqrt{S_i} \leq P_i/4$ , откуда  $\sum \sqrt{S_i} \leq 10 \leq 10 \sum S_i$ . Поэтому хотя бы для одной фигуры  $\sqrt{S_i} \leq 10 S_i$ , что равносильно требуемому неравенству.

## II Турнир городов (1981)

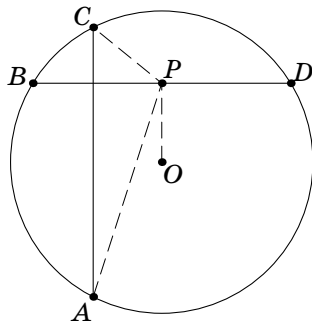
**1. Указание.** Докажите, что равенство возможно только при  $x = 0$  или  $x = -1$ .

**2. Решение.** Пусть сначала точки лежат на одной прямой и  $A$  — самая правая из точек, а  $B$  — самая левая. Если ни  $A$ , ни  $B$  не выброшена, то «почти центром» может быть только середина отрезка  $AB$ ; сверх того, есть еще 2 кандидата в тех случаях, когда выбрасывается точка  $A$  или  $B$ . Примеры для 1, 2 и 3 «почти центров» легко строятся.

Общий случай легко сводится к указанному, поскольку можно все точки спроектировать на некоторую прямую общего положения. Если  $M$  — «почти центр симметрии» для системы точек на плоскости, то его проекция будет «почти центром» для проекций.

**Ответ.** 1, 2, 3.

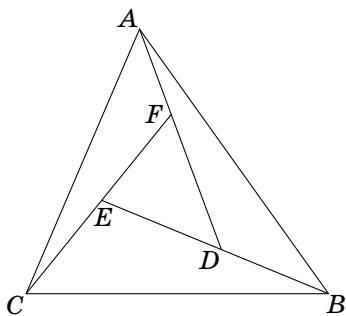
**3. Решение.** Проекция  $P$  точки  $O$  на  $BD$  делит  $BD$  пополам (см. рисунок). Поэтому площадь четырехугольника  $ABCP$  равна половине площади четырехугольника  $ABCD$  (площадь каждого равна половине произведения его диагоналей  $AC \cdot BP$  и  $AC \cdot BD$  соответственно). С другой стороны, поскольку  $OP$  параллельна  $AC$ ,



$$S_{\triangle ACP} = S_{\triangle ACO},$$

а потому и  $S_{ABCO} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ .

**6. Решение.** Проведем плоскость и расположим 4 пирамиды по одну сторону от этой плоскости так, чтобы у каждой из них три вершины лежали на плоскости, как показано на рисунке, а четвертая вершина (вне плоскости) у них была общая. (Если  $A, B, C, D, E, F$  — точки на плоскости, показанные на рисунке, и  $Z$  — точка вне плоскости, то эти четыре пирамиды —  $ABDZ, BCEZ, ACFZ$  и  $DEFZ$ .)



Теперь если правильно расположить другие 4 пирамиды по другую сторону от плоскости, то можно добиться, чтобы каждая с каждой соприкасалась гранью.

**Ответ.** Да, можно.

**7. Ответ.** Да, верно.

**Решение.** Пусть все овцы находятся на параллельных прямых, расстояние между соседними прямыми равно 3. Тогда волк своим ходом может напасть только на одну овцу, и она всегда может уйти от волка, не сходя с прямой.

**8. Указание.** Разделите данное число на 7 и представьте частное в виде суммы девяти чисел, каждое из которых состоит из цифр 0 и 1.

**9. Указание к пункту б).** Если число друзей нечетно, то в последнем раунде бесед не участвует один из них; следовательно, если часов всего 6, он должен был бы узнать все новости за 5 часов, а это невозможно.

**Идея построения примера.** Если число друзей четно, то занумеруем их от 1 до  $K$ , и пусть каждый человек с нечетным номером  $r$  говорит сначала с номером  $r + 1$ , затем — с номером  $r + 3$ ,  $r + 7, \dots, r + 2^k - 1$  (считаем по кругу: после номера  $K$  идет номер 1). При нечетном числе проще всего выделить из них  $2^k$  (при 55 друзьях нужно выделить 32) и сделать так, чтобы за разговоры со второго по предпоследний они узнали все новости; остальные 23 друга участвуют только в первом и последнем разговорах.

**Ответ.** а) 6, б) 7, в) 7.

**10. Решение.** Расставим в клетках числа  $2^{-k}$ , где  $k$  — сумма номера строки и столбца (таким образом, в угловой клетке стоит 1, в двух соседних — по  $\frac{1}{2}$ , в трех смежных с ними — по  $\frac{1}{4}$ , и т. д.) При преобразованиях сумма чисел в клетках, где стоят фишки, не меняется. Для решения задачи а) этого уже достаточно, а для решения б) надо дополнительно учесть, что после любого числа преобразований в первой строке и в первом столбце стоит не более одной фишки.

**Ответ.** Нет (в обоих случаях).

### III Турнир городов (1982)

**1. Ответ.** Все искомые числа имеют вид  $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ , где  $a, b, c$  — произвольная перестановка чисел 1, 2, 4. Например, наименьшим из искомых является число  $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 720$ .

**2. Решение.** Будем уменьшать круг, содержащий данную фигуру, пока это возможно. В конечном счете либо две вершины четырехугольника составят диаметр круга (тогда радиус меньше 0,5), либо на окружности окажутся три вершины, причем они будут образовывать остроугольный треугольник со сторонами, меньшими 1 (если треугольник тупоугольный, то круг можно уменьшить). По теореме синусов  $2R = a/\sin A$ , и выбрав угол, который не меньше  $60^\circ$  (но не больше  $90^\circ$ ), мы получаем

$$R \leq \frac{1}{\sqrt{3}} < 0,9.$$

**4. Решение.** Пусть авиапассажир  $A$  вылетит из столицы  $M$  в произвольном направлении и далее будет путешествовать, никогда не пролетая дважды по одному маршруту, пока это возможно. Поскольку маршрутов конечное число, в какой-то момент он застрянет в одном из городов, используя все идущие из него маршруты. Однако, посещая любой город  $X$ , кроме начального,  $A$  использует два пути («прилетел — улетел»); всего путей 10, поэтому  $A$  не может застрять в таком городе. Следовательно, город, где  $A$  застрянет, — это столица  $M$ . Но чтобы в ней застрять, он должен предварительно 50 раз вылететь из  $M$  и снова вернуться туда. Таким образом, с точки зрения столицы, его маршрут состоит из 50 петель. Можно на каждой из этих петель закрыть одну авиалинию (ту, например, по которому  $A$  возвращается в  $M$ ), и возможность попасть из любого города в любой сохранится.

**Замечание.** Тем же способом доказывается, что можно вместо столицы выбрать любой другой город и закрыть половину путей, исходящих из него.

**5. Ответ.** В обоих случаях «да».

**Метод построения.** Следует взять любую конечную арифметическую прогрессию из целых чисел и разделить все ее члены на их общее кратное.

**6. Решение.** Обозначим данную сумму через  $L_k$ .

а) Если  $k = 4$ , то

$$L_4 = \frac{x_1 + x_3}{x_2 + x_4} + \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_3} = a + a^{-1} \geq 2.$$

Для остальных  $k$  ( $k > 4$ ) можно сделать переход по индукции. А именно: можно считать, что  $x_{k+1}$  — наименьшее из всех иксов, тогда, сначала отбрасывая в сумме  $L_{k+1}$  последний член, а затем уменьшая два других, мы получаем:

$$L_{k+1} \geq \frac{x_1}{x_{k+1} + x_2} + \dots + \frac{x_k}{x_{k-1} + x_{k+1}} \geq \frac{x_1}{x_k + x_2} + \dots + \frac{x_k}{x_{k-1} + x_k} = L_k.$$

б) Для того чтобы сумма оказалась близка к 2, нужно взять числа

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_3 = t, \quad x_4 = t^2, \quad \dots, \quad x_k = t^{k-2}.$$

При  $t \rightarrow 0$  первые два слагаемых стремятся к 1, а остальные — к нулю.

**7. Ответ.** Минимальное число звеньев  $2K - 2$  для всех  $K \geq 3$  (случаи  $K = 1, 2$  тривиальны).

**Указание.** Для доказательства того, что меньшим числом обойтись нельзя, нужно рассмотреть по отдельности два случая:

1) имеется не менее  $K$  горизонтальных звеньев ломаной (тогда нужно еще минимум  $K - 1$  отрезков, соединяющих горизонтальные звенья между собой);

2) их меньше, и, следовательно, нужно еще покрыть каждую из  $K$  вершин оставшегося (хотя бы одного) ряда специальным наклонным или вертикальным звеном.

**8. Указание.** Сумма первых  $n$  чисел последовательности не меньше  $2 + 3 + \dots + (n + 1)$  и по меньшей мере на  $n$  превышает сумму их номеров, т.е. разность суммы первых чисел и суммы их номеров стремится к бесконечности. Отсюда ясно, что число чисел, больших своего номера, бесконечно.

**9. набросок решения.** Пусть  $P(x) = x^k + R(x)$ ,  $\deg R < k$ .

Если  $R = 0$ , то легко видеть, что  $P(x)$  принимает значение  $2^s$ , только если  $s$  делится на  $k$ . Поэтому  $k$  должно равняться 1, что и требуется.

Пусть теперь  $R \neq 0$ . Можно считать, что  $R(x) = ax^{k-1} + \dots$ , где  $0 \leq a < k$  (общий случай легко сводится к этому заменой  $x \rightarrow x + p$ , где  $p = [a/k]$ ).

Если при  $R = 0$  «неподходящими» были значения  $s$ , не делящиеся на  $k$ , то теперь мы, напротив, выясним, принимает ли  $P(x)$  значение  $x^s$  при  $s = km$ .

Воспользуемся тем, что старший член  $x^k$  при больших  $x$  много больше «хвоста»  $R(x)$ . Отсюда следует, что при достаточно больших  $m$   $P(x)$  может принимать значение  $x^s$ , только если  $x^k \approx 2^{km}$ ,

т. е.  $x \approx 2^m$ . Утверждение «приближенно равен» можно существенно уточнить: нетрудно доказать, что

$$P(2^m - 1) < 2^{km}, \quad P(2^m + 1) > 2^{km}.$$

Таким образом, среди положительных чисел (случай отрицательных аргументов рассматривается аналогично) единственным кандидатом на роль подходящего значения является число  $2^m$ , но тогда должно быть  $R(2^m) = 0$ . В таком случае  $R(x)$  имеет бесконечно много корней вида  $2^m$ , следовательно, он тождественно равен 0, а этот случай мы уже разобрали.

## IV Турнир городов (1982/83)

**1. Решение.** Рассмотрим последние  $4k$  карт в полученной колоде (при произвольном  $k$ ). Среди них, скажем,  $r$  карт с конца и, соответственно,  $4k - r$  карт с начала. Отсюда легко следует, что среди них поровну карт любой масти, а это равносильно утверждению задачи.

**Замечание.** Это решение годится и для более общего случая, когда карты «врезают» не как единое целое, а вразбивку (именно так в действительности и поступают картежники, правда они не переворачивают часть колоды), то есть карты идут, например, в порядке (выпишем последние): ..., 5, 4, 31, 3, 32, 33, 34, 2, 1, 35, 36.

**2. Ответ.** 25.

**Решение.** Если есть 25 фишек, то можно расставить синие фишки на местах № 5, 10, 16, 21 (а на остальных — фишки другого цвета), и такая расстановка удовлетворяет условию.

Допустим, что есть 26 фишек, и на 1-м месте стоит фишка, скажем, синего цвета. Тогда синие фишки стоят также на местах: 12, 23, 7, 18, 2, 13, 24, 8, 19, 3, ... Легко убедиться, что придется всюду ставить только синие.

**3. Указание.** Достаточно рассмотреть числа  $m = n! - 1$ ,  $k = n!$  ( $n$  — произвольно).

**4. Ответ.** а) Нет.

**Решение.** а) Предположим, например, что хорды соединяют точки: 1 и 2, 3 и 6, 4 и 8, 5 и 10, 7 и 9. Тогда длины соответствующих дуг различны и равны 1, 3, 4, 5, 2.

б) Предположим, что все хорды имеют разную длину, т.е. соответствующие дуги имеют длины 1, 2, ..., 10 (по одному разу). Получается, что 5 дуг соединяют точки с номерами разной четности, и 5 — одной четности; скажем,  $K$  дуг соединяют «нечетные» точки и  $(5 - K)$  — «четные». Но тогда число «нечетных» точек равно  $5 + 2K$ , а это противоречит тому, что имеется 10 «четных» и 10 «нечетных» точек.

**5. Первое решение.** Следует нарисовать такую фигуру, у которой число квадратилов в строке равно очередному слагаемому в первой сумме (таким образом, общее число квадратилов равно первой сумме). Первый столбец, очевидно, состоит из  $n$  квадратилов; развернем его на 90 градусов и поставим на роль первой строки. После этого площадь нужно теперь сосчитать не по строкам, а по столбцам — и получится вторая сумма.



**Второе решение.** Применим индукцию. Для  $n = 2$  обе части равны 1. При переходе от  $n$  к  $n + 1$  в обеих частях, во-первых, прибавляется еще одно (последнее) слагаемое, равное 1, и, во-вторых, может добавиться еще одна или несколько единиц — в том случае, если  $n$  представляется в виде степени числа одним или несколькими способами. К примеру:  $64 = 8^2 = 4^3 = 2^6$ , и поэтому при переходе от 63 к 64 увеличиваются на единицу: в левой части — слагаемые  $[n^{1/2}]$ ,  $[n^{1/3}]$  и  $[n^{1/6}]$ , а в правой —  $[\log_2 n]$ ,  $[\log_4 n]$  и  $[\log_8 n]$ . Поэтому обе части равенства увеличиваются на одно и то же число.

**6. Ответ.** Существует. Нужно взять тетраэдр  $ABCD$  и вырезать из него маленький тетраэдр  $EFGH$ , разместив вершины  $E$ ,  $H$  на ребре  $AD$ , а вершины  $G$ ,  $F$  — на гранях.

**7. Решение.** а) Достаточно разрезать полосу на 12 кусков по 5 знаков в каждом и провести непосредственную проверку того факта, что любая последовательность длины 5 разбивается на не более чем 2 симметричных куска. Например,  $xxxxo = (xx)(xox)$ ,  $xooxx = (xoo)x$  и т. п.

б), в) Обозначим шестибуквенное слово  $xхоох$  через  $A$  и напомним периодическую последовательность из 60 букв  $AA \dots A$  (десять раз). Легко убедиться, что в этой последовательности нет симметричных кусков длины более 4, откуда сразу следует оценка б). Более аккуратный анализ показывает, что ее нельзя разрезать меньше, чем на 20 кусков.

**8. Решение.** б) Будем рассматривать  $\overrightarrow{MO}$  и  $\vec{S}$  как вектор-функции точки  $M$ . Нетрудно видеть, что зависимость в обоих случаях линейная. Кроме того, если  $M$  совпадает с одной из вершин тетраэдра, то из четырех слагаемых, входящих в  $\vec{S}$ , три равны нулю, а четвертое пропорционально  $\overrightarrow{MO}$  с коэффициентом  $4/3$ ; таким образом, в этих четырех точках  $3\vec{S} = 4\overrightarrow{MO}$ . Но если две линейные функции совпадают в 4 точках пространства, не лежащих в одной плоскости, то они совпадают всюду.

а) Приведенное решение проходит и в плоском случае, и при малых  $n$  (например, для квадрата или шестиугольника) именно оно является простейшим. Однако для произвольного  $n$  оно требует вычисления сумм косинусов, поэтому мы дадим другое, чисто геометрическое решение.

Проведем из точки  $M$  к каждой стороне по две наклонных параллельно двум соседним сторонам до пересечения с ней (при этом в каждом направлении из  $M$  будет проведено два отрез-

ка, параллельных данной стороне  $A_i A_{i+1}$ , но в противоположных направлениях, до пересечения с двумя сторонами, соседними с  $A_i A_{i+1}$ ). Сложим все получившиеся векторы и сгруппируем их сумму  $\vec{S}$  двумя способами. Если группировать пары векторов, направленных к данной стороне, то, очевидно, их полусумма равна  $\overrightarrow{MK_i}$ ; соответственно,

$$\vec{S} = 2 \cdot (\overrightarrow{MK_1} + \overrightarrow{MK_2} + \dots + \overrightarrow{MK_n}).$$

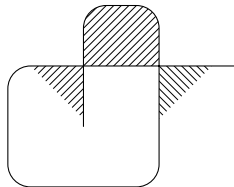
С другой стороны, если группировать пары векторов, параллельных двум соседним сторонам, то возникает параллелограмм, противоположные вершины которого — точка  $M$  и вершина  $A_i$ , так что сумма равна  $\overrightarrow{MA_i}$ . Соответственно  $S = \sum \overrightarrow{MA_i}$ .

Остается напомнить известный факт: сумма векторов, проведенных из произвольной точки  $M$  в вершины, равна  $n \cdot \overrightarrow{MO}$ .

**9. Решение.** Метод построения очевиден: пусть поезд сначала сверху, потом снизу, сверху, снизу и т. д. Вопрос лишь в том, не приведет ли это в какой-то момент к противоречию.

Заметим, что при незамкнутой линии такое противоречие, действительно, может возникнуть, как видно из рисунка.

Однако поскольку линия метро замкнута, то карту Марса можно раскрасить «шахматным» образом в черно-белую «клетку»; клетки не обязаны быть квадратами, но все время с одной стороны линии метро идет черный цвет, с другой — белый.



Теперь установим принцип построения туннелей: если поезд подходит к перекрестку так, что черный цвет у него слева (заметим, кстати, что это не зависит от того, с какой стороны поезд подходит к перекрестку — с севера или с юга), то он должен идти над пересекающей линией, если черный цвет справа — под линией. Очевидно, что такая модель непротиворечива, а только это и требовалось доказать.

**10. Ответ.** Нет. Он мог, например, полчаса идти со скоростью 6 км/ч, потом полчаса идти со скоростью 4 км/ч, следующие полчаса — опять 6 км/ч, и т. д.

**11. а) Решение.** Рассмотрим две противоположные стороны фигуры  $AB$  и  $GH$ ; они параллельны. К стороне  $AB$  прилежат параллелограмм (один или несколько), к которому (которым) прилегают следующие, и т. д., пока не дойдем до стороны  $GH$ . Получили цепь параллелограммов, у которых две стороны параллельны  $AB$  и  $GH$ .

Теперь возьмем две противоположные стороны, перпендикулярные  $AB$  и  $GH$ , и построим цепь для них. Эти цепи обязаны пересечься; в пересечении будет хотя бы один прямоугольник.

Для построения других прямоугольников надо взять другую четверку сторон.

**б) Ответ.** Площадь равна  $ka^2$ .

**12. Указание.** Единственный способ, которым волшебник может воспользоваться, — упорядочить города (что можно сделать  $N!$  способами) и установить, что ехать разрешается только в сторону увеличения номеров. Отсюда легко вытекают все 4 пункта задачи, и поэтому именно это утверждение нужно доказывать.

**14. Решение.** Дадим каждому числу бирку с номером. Первому числу даем номер 1, а следующим — по такому принципу: если оно не является делителем одного из предыдущих чисел, то даем ему также номер 1, если же оно делитель — то даем ему номер на единицу больше, чем номер этого числа (если их несколько, выбираем наибольший).

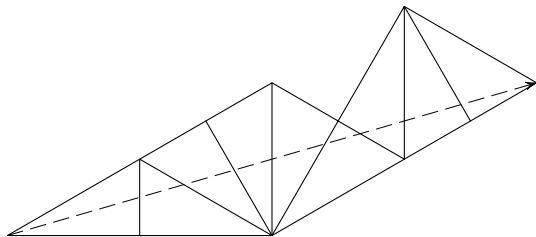
После этого, если одно из чисел имеет номер 5, то верна первая альтернатива, если же нет, то имеется 5 чисел с одинаковым номером (по принципу Дирихле), и потому верна вторая.

**15. Решение. а)** Сумма цифр обоих чисел равна удвоенной сумме цифр  $M$  (или  $K$ ), минус несколько девяток. При этом число девяток равно числу переносов в разрядах, т. е. количеству цифр, которые больше 4.

**б)** Решается аналогично, с той поправкой, что нужно следить за нечетными цифрами.

**в)** Нужно воспользоваться тем, что  $5M = 10M/2$ , а числа  $10M$  и  $10K$  получены друг из друга перестановкой цифр.

**16. Указание.** Можно считать, что бильярдный шар движется по прямой, а исходный треугольник последовательно отражается относительно той стороны, от которой в действительности отразился шар.



**17. Решение.** Отметим красным цветом точки с числами от 251 до 750, и синим — остальные. Очевидно, красных точек половина, и их можно соединять с чем угодно, не нарушая второго условия.

Поэтому достаточно решить такую задачу: по окружности представлены  $N$  красных и  $N$  синих точек, требуется так соединить их попарно, красные с синими, чтобы отрезки не пересекались.

Это уже совсем легко. Найдем красную точку, которая стоит рядом с синей, и соединим их, а затем мысленно выбросим эти две точки. Осталось на две точки меньше. Далее действуем аналогично.

**18. Решение.** Пусть  $Q, R, S$  — середины соответствующих сторон. Тогда

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CP} = \vec{0} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{CS},$$

откуда  $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{KR} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$ . Поскольку  $MQ, KR$  и  $PS$  лежат на сторонах треугольника  $ABC$ , отсюда следует, что они образуют треугольник, подобный ему. Но тогда либо все три этих отрезка нулевые (что и утверждает задача), либо все три точки  $M, K, P$  сдвинуты по отношению к  $Q, R, S$  в одну и ту же сторону (например, по часовой стрелке). Легко видеть, что в последнем случае отрезки  $AM, BK$  и  $CP$  не могут пересекаться в одной точке.

**20. Ответ.** Первый игрок выигрывает в обоих случаях.

**Решение.** Идея проста: вначале он должен закрасить в красный цвет достаточное количество клеток вдоль одной прямой (второй может помешать ему закрасить ту или иную клетку на этой прямой, но и только). При этом число «потенциальных квадратов», для создания которых нужно закрасить еще 2 клетки на какой-то другой прямой, растет как квадрат числа ходов, тогда как число клеток, закрашенных вторым вне этой прямой, растет не быстрее, чем первая степень числа ходов. Поэтому первый сможет через некоторое время выбрать третью клетку вне прямой так, чтобы закрасив ее, он создал сразу несколько угроз (в пункте а) достаточно двух, в пункте б) — трех угроз).

**21. Указание.** Пусть  $k/n = \alpha$ . Начнем закрашку с произвольной вершины и будем действовать по следующему алгоритму: закрашиваем  $r$ -ю вершину, если  $[r\alpha] - [(r-1)\alpha] = 1$ . Иначе говоря, первая вершина, которую мы закрашиваем, — та, для которой  $r\alpha$  впервые становится не меньше 1, вторая — для которой  $r\alpha$  впервые становится не меньше 2, и т. д. Далее следует доказать, что такая раскраска годится и что любая «почти равномерная» раскраска такова.

**22. Указание.** Пусть  $2M$  и  $2m$  — наибольшее и наименьшее число конфет, которое есть у ребят. Если  $M = m$ , то доказывать нечего. Пусть  $M > m$ . Докажите, что после каждой операции число  $M$  не увеличивается (хотя может случиться, что увеличится количество ребят, у которых  $2M$  конфет), и что число ребят, у которых  $2m$  конфет, с каждой операцией уменьшается, пока не достигнет нуля; после этого наименьшее число конфет станет равным  $2(m + 1)$ . Дальнейшее очевидно.

**23. Решение.** Обозначим эти суммы  $S_+$  и  $S_-$ . Если  $n$  чётно, то сразу ясно, что попарно противоположные отрезки равны, так что  $S_+$  и  $S_-$  составлены из одинаковых слагаемых. Пусть теперь  $n$  нечётно. Если  $M$  — центр многоугольника, то утверждение также очевидно. Общий случай сводится к этому так: проведем из точки  $M$  прямую параллельно отрезку, соединяющему центр с одной из вершин, и будем двигать  $M$  вдоль этой прямой. Докажите, что при этом разность  $S_+ - S_-$  не меняется. Поскольку двигать таким образом можно вдоль нескольких прямых (хватило бы и двух, а у нас их  $n$  штук), то можно переместить  $M$  в центр.

## V Турнир городов (1983/84)

**1. Решение.** Во-первых, концы четырех медиан, выпущенных из точки  $M$ , (это середины сторон данного квадрата) образуют квадрат  $PQRL$ . Во-вторых, точки пересечения медиан образуют фигуру, которая получается из фигуры  $PQRL$  сжатием к точке  $M$  с коэффициентом  $2/3$ . Следовательно, это тоже квадрат.

**2. Ответ.** Все числа, кроме 1, 2, 3, 4, 6.

**3. Решение.** Отложим на плоскости отрезок  $MN$  ( $M$  — середина диагонали  $AC$ ,  $N$  — середина  $BD$ ). Затем найдем середину  $P$  стороны  $AB$  искомого четырехугольника, пользуясь тем, что в треугольнике  $MNP$  известны все три стороны ( $MP$  и  $NP$  — половины сторон  $BC$  и  $AD$ ). Аналогично находятся середины трех других сторон. После этого уже легко найти вершины.

**4. Указание.** Докажите сначала, что  $1 < a_1 < 3$ , т. е.  $a_1 = 2$ . Отсюда следует, что  $a_2 = 3$  и  $a_3 = 6$ . Теперь без труда находятся  $a_6 = 9$ ,  $a_9 = 18$  и т. д.

Оказывается, для всех  $k$ ,  $80 < k < 163$ , справедливо соотношение  $a_k = k + 81$ ; для всех  $k$ ,  $728 < k < 1459$ , справедливо соотношение  $a_k = k + 729$ , и т. п.

**Ответ.**  $a_{100} = 181$ ,  $a_{1983} = 3762$ .

**5. а) Решение.** Это возможно. Например, можно оставить центральную шашку на месте, а остальные выстроить цепочкой вокруг нее в соответствии с ходом коня.

**Замечание.** Можно также переставить центральную шашку в угол.

**б) Решение.** Это невозможно. Рассмотрим две шашки, отстоящие на ход коня и стоящие недалеко от центра (например, на полях  $e5$  и  $c4$ ). Они должны, во-первых, встать на соседние (ходом короля) поля, а во-вторых, вокруг них должно быть еще 14 полей, которые они бьют (по 7 для каждой). Этого быть не может.

**6. Указание.** Отрезок  $MK$  касается окружности радиуса  $AB$  с центром в точке  $A$ .

**Ответ.**  $45^\circ$ .

**7. Решение. б)** Сумма двух последних цифр наших чисел должна равняться 11. Сумма двух предпоследних — тоже. Поэтому можно переставить последние цифры с предпоследними, что «почти всегда» дает другую правильную пару; все правильные пары груп-

$$493\,827\,165 + 493\,827\,156$$

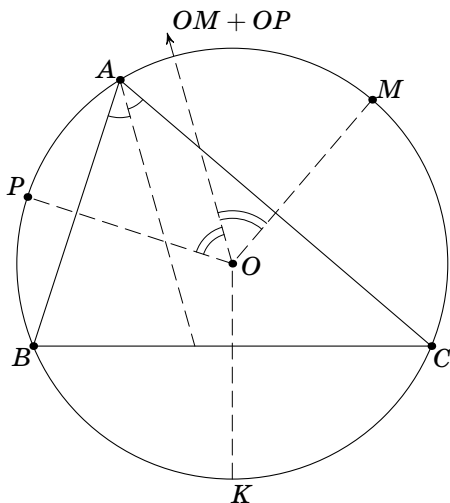
а) Поскольку сумма цифр таких чисел равна 45, ясно, что необходимо, чтобы произошли переносы в 5 разрядах. Теперь уже нетрудно подобрать правильные пары. К примеру:

$$251\,468\,379 + 736\,185\,942$$

**8. Решение.** Углы  $BAC$  и  $POM$  имеют попарно перпендикулярные стороны, откуда легко следует, что их биссектрисы параллельны. Но  $|OM| = |OP|$ , следовательно,  $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}$  — биссектриса угла  $POM$  и параллельна биссектрисе угла  $A$ . Имеем

$$\overrightarrow{KZ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}.$$

Поскольку точка  $K$  делит дугу  $BC$  пополам, она лежит на продолжении биссектрисы  $A$ , тогда и  $Z$  лежит на биссектрисе угла  $A$ . Аналогично получаем, что  $Z$  лежит на двух других биссектрисах, что и требовалось.

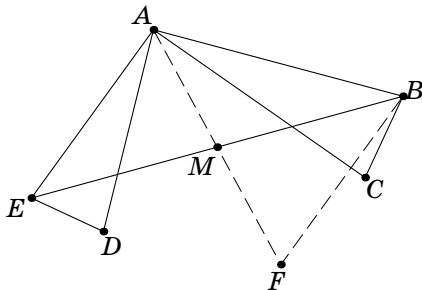


**10. а) Решение.** Это невозможно. В самом деле, рассмотрим большой квадрат  $N \times N$ . В нем имеется  $N^2/10^4$  пустых клеток, а за один ход в этот квадрат можно ввести не более  $4N + 4$  королей

(такова длина границы квадрата). Поэтому для любого конечного числа шагов найдется квадрат, который не удастся заполнить.

**б) Указание.** Это возможно. Для начала придумайте способ заполнить одну бесконечную прямую, если все остальные клетки заполнены.

**12. Решение.** Отложим на продолжении медианы  $AM$  за точку  $M$  отрезок  $MF$ , равный  $AM$  (см. рисунок). Из равенства треугольников  $BMF$  и  $EMA$  следует, что  $BF = AE = AD$  и  $\angle MBF = \angle MEA$ .



Поэтому

$$\angle ABF = \angle ABM + \angle MBF = \angle CAD.$$

Учитывая еще условие  $AB = AC$ , мы видим, что треугольники  $ABF$  и  $CAD$  равны. Следовательно,  $CD = AF = 2 \cdot AM$ .

**13. Указание.** Если  $n = 4$ , то сумма 12 последовательных чисел не делится на 4 и их нельзя расставить так, чтобы оказались равными суммы в *четырёх* прямоугольниках.

Для  $n = 3$  можно, например, расставить числа от 1 до 8 (сумма этих чисел равна 36; достаточно проследить за тем, чтобы сумма чисел на каждой из диагоналей равнялась 12). Для  $n = 5$  можно расставить числа от 0 до 15.

**Ответ.** а) Возможно, б) невозможно, в) возможно.

**14. Указание.** Можно подобрать неограниченное количество чисел, для которых первое и третье слагаемые равны нулю (для этого достаточно, чтобы в числе был хоть один нуль),  $S(x)$  заканчивалось нулем (тогда и второе слагаемое равно 0) и имело такую сумму цифр, чтобы  $S(S(x)) = 1984$ .

**Ответ.** Уравнение имеет бесконечно много решений.



**15. Указание.** 1) На доске есть 4 клетки, каждая из которых находится на расстоянии 6 от любой другой (своего рода «тетраэдр»), и поэтому менее чем 4 цветами обойтись нельзя.

Обойтись 4 красками можно.

2) Поскольку переход с черной клетки (в шахматном смысле слова) на белую заведомо требует нечетного числа ходов, черные и белые клетки можно раскрашивать независимо друг от друга. Поэтому достаточно придумать раскраску одних только «черных» клеток.

**16. Решение.** Воспользуемся тем, что соотношение  $175 : 125$  можно сократить на 25, а  $175 : 126$  — на 7. Получается, что  $7 \text{ ш} > 56$  (7 шалтаев дороже, чем 5 болтаев), и поскольку цена — целое число копеек, то  $7 \text{ ш} \geq 56 + 1$ , откуда  $175 \text{ ш} \geq 1256 + 25$ . Аналогично  $25 \text{ ш} + 1 \leq 186$ ,  $175 \text{ ш} + 7 \leq 1266$ . Отсюда цена болтая не меньше 32 копеек, откуда легко оценить цену шалтая и получить обе оценки.

**17. Решение.** Пусть  $\overrightarrow{SABC}$  — данный тетраэдр,  $ABC$  — основание,  $a, b, c$  — векторы  $\overrightarrow{SA}$ ,  $\overrightarrow{SB}$ ,  $\overrightarrow{SC}$ , выпущенные из вершины  $S$ , и пусть  $G, H$  — основания принадлежащих грани  $SAB$  высот  $BG$ ,  $AH$ . Тогда  $\overrightarrow{SG} = \alpha a$ ,  $\overrightarrow{SH} = \beta b$ ; коэффициенты  $\alpha, \beta$  легко найти из условия перпендикулярности высот сторонам, и они равны соответственно  $(a, b)/(a, a)$  и  $(a, b)/(b, b)$ . (Круглые скобки обозначают скалярное произведение векторов.)

Вводя вспомогательные векторы

$$a' = a/(a, a), \quad b' = b/(b, b), \quad c' = c/(c, c),$$

мы видим, что  $\overrightarrow{HG} = (a, b) \cdot (a' - b')$ . Аналогично векторы, соединяющие основания высот на других гранях, пропорциональны  $b' - c'$  и  $c' - a'$  соответственно. Отсюда видно, что сумма этих векторов с коэффициентами  $1/(a, b)$ ,  $1/(b, c)$ ,  $1/(a, c)$  равна нулю, что и требуется.

**18. Указание.** На листе имеется 100 расположенных «довольно далеко друг от друга» точек с координатами  $(3k + 1, 3r + 1)$ ,  $0 \leq k, r \leq 9$ . Поэтому, как бы ни были вырезаны первые 99 квадратиков, остался незатронутым, по меньшей мере, один квадратик с центром в такой точке.

**19. Решение.** Продолжим нашу функцию для  $x > 1$  произвольным образом так, чтобы она возрастала (это удобно по техническим причинам), и начнем покрывать график от левого нижнего угла. Поскольку функция  $g(b) = bF(b)$  непрерывна и возрастает

от нуля до единицы, имеется ровно одно число  $b_1$ , для которого  $g(b_1) = 1/N^2$ . Построим первый прямоугольник со сторонами  $b_1$  и  $F(b_1)$ . Затем рассмотрим функцию

$$h(b) = (b - b_1)(F(b) - F(b_1))$$

и найдем точку  $b_2$ , в которой  $h(b_2) = 1/N^2$ . Это даст нам второй прямоугольник нужной площади; его противоположными вершинами будут точки  $(b_1, F(b_1))$  и  $(b_2, F(b_2))$ . Далее построим третий прямоугольник, начиная от точки  $b_2$ , и т.д. Нам достаточно доказать, что координата  $b_N$  правого конца  $N$ -го прямоугольника удовлетворяет неравенству  $b_N \geq 1$ .

Это следует из неравенства Коши—Буняковского. В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} &= [b_1 \cdot F(b_1) \cdot (b_2 - b_1) \cdot (F(b_2) - F(b_1)) \cdot \dots \\ &\quad \dots \cdot (b_N - b_{N-1}) \cdot (F(b_N) - F(b_{N-1}))]^{1/(2N)} \leq \\ &\leq \frac{b_1 + (b_2 - b_1) + \dots + F(b_1) + (F(b_2) - F(b_1)) + \dots}{2N} = \frac{b_N + F(b_N)}{2N}. \end{aligned}$$

Итак,  $b_N + F(b_N) \geq 2$ , откуда сразу следует, что  $b_N \geq 1$ .

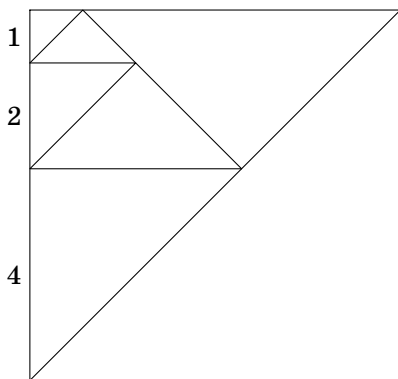
**20. Ответ** в обоих случаях:  $10\sqrt{2}$ .

**Решение.** То, что отодвинуть на большее расстояние невозможно, очевидно для центральных солдатиков (на доске просто нет точки, отстоящей от центра больше, чем на  $10\sqrt{2}$ ). Конструкция для квадрата  $20 \times 20$  состоит в том, что надо разбить доску на 4 квадрата  $10 \times 10$  и переставить каждый квадрат с диагонально ему противоположным (это значит, например, что солдатик с клетки (7, 5) перейдет в клетку (17, 15); с клетки (12, 8) в клетку (2, 18) и т.п.). В случае б) можно, например, произвести ту же операцию с квадратом  $20 \times 20$ , а на оставшемся «бордюре» (последний ряд и последний столбец) провести расстановку отдельно, что не представляет труда.

**22. Решение.** Пусть при расстановке по росту оказалось, что в одной из пар  $(A, B)$  мальчик  $A$  оказался более чем на 10 см выше (случай, когда выше девочка, аналогичен).

Назовем высокими всех девочек, которые выше  $B$ ; пусть их число равно  $k$ . Остальных девочек назовем маленькими. Высокими мальчиками мы назовем тех, кто выше  $A$ , а также самого  $A$  (таким образом, имеется  $k + 1$  высоких мальчиков). Теперь очевидно, что при любой расстановке придется поставить кого-то из высоких мальчиков рядом с маленькой девочкой, и тогда разность их ростов заведомо больше 10 см, вопреки условию.

**24.** Одно из решений (вероятно, самое простое) видно из рисунка.



**25. Решение.** Достаточно взять решения уравнения  $x^2 = 2y^2 + 1$  при четном  $y$ . Имея одно решение  $x = 3$ ,  $y = 2$ , можно затем строить следующее решение по формуле  $X = x^2 + 2y^2$ ,  $Y = 2xy$ , что проверяется непосредственно. Таким образом, мы получаем сначала решение  $x = 9 + 2 \cdot 4 = 17$ ,  $y = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ , затем  $x = 289 + 2 \cdot 12^2 = 577$ ,  $y = 2 \cdot 12 \cdot 17 = 408$ , и т. д.

**28. Решение.** Если в одну из трех идущих подряд комнат в какой-то момент вселяется пианист, то эти три комнаты уже никогда пустовать не будут: хотя бы в одной из них всегда кто-то будет жить. Отсюда легко следует, что ни один пианист не может сдвинуться более чем на  $3 \cdot 9 = 27$  комнат по сравнению со своим первоначальным местом проживания. С другой стороны, при каждом переселении сумма квадратов номеров комнат возрастает:

$$(K-1)^2 + (K+2)^2 = K^2 + (K+1)^2 + 2.$$

Поскольку неограниченно возрастать она не может, это означает, что со временем переселения прекратятся.

**30. Решение.** Мы двумя разными способами подсчитаем или оценим число разбросов.

**б)** Достаточно оценить число разных слагаемых в каждом разбиении. Но если разброс некоторого разбиения равен  $k$ , т. е. в разбиение входит  $k$  разных чисел, то заведомо

$$N \geq 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

откуда  $k < 2N$ . Складывая эти неравенства по всем разбиениям, мы и получаем оценку б).

а) Здесь мы оценим сумму всех разбросов по-другому. Обозначим через  $q(r)$  количество всех разбиений, содержащих некоторое число  $r$ , и воспользуемся тем очевидным фактом, что  $q(r) = P(N - r)$  (в самом деле, взяв любое разбиение  $N$ , в котором содержится  $r$ , и отбросив это слагаемое, мы получим разбиение числа  $N - r$ ). С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} \text{сумма всех} \\ \text{разбросов} \end{array} \right) &= \\ &= \left( \begin{array}{c} \text{число разбиений, в которых} \\ \text{содержится 1} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{число разбиений, в которых} \\ \text{содержится 2} \end{array} \right) + \dots + \left( \begin{array}{c} \text{вплоть} \\ \text{до } N \end{array} \right). \end{aligned}$$

В самом деле, в этой сумме каждое разбиение учтено столько раз, сколько в нем есть разных слагаемых. Учитывая еще, что  $q(N) = 1$ , получаем формулу из пункта а).

## VI Турнир городов (1984/85)

**1. Решение.** Если  $OD = OE$ , то в треугольниках  $ADO$  и  $AEO$  равны по две стороны и по одному углу. Это как раз дает две возможности:

— либо  $\angle ADO = \angle AEO$ , тогда треугольники  $ADO$  и  $AEO$  равны, и легко доказать, что треугольник  $ABC$  равнобедренный,

— либо  $\angle ADO + \angle AEO = 180^\circ$ . В этом случае легко видеть, что треугольники  $BOE$  и  $BDA$  подобны, и прямой подсчет углов показывает, что  $\angle A = 60^\circ$ .

**2. Решение.** Имеется 8 точек на краю большого квадрата, где сходятся по 3 улицы, и в эти точки придется прийти дважды, стало быть, пройти хотя бы по одной лишней стороне на каждую пару этих точек. Пример постройте сами.

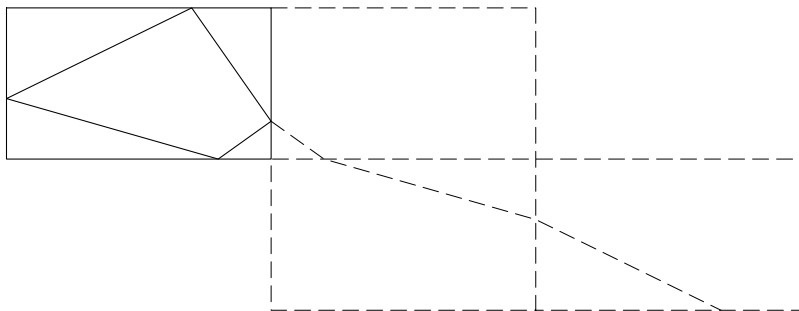
**Ответ.** Придется пройти 28 сторон (24 стороны кварталов имеется в городе, и дважды проходим 4 стороны).

**3. Указание.** Данное уравнение можно переписать в виде:

$$(x+3)(x-3) = x^2 - 9 = 2^n - 2.$$

**Ответ.**  $n = 1$ ,  $x = \pm 3$ .

**4. Указание.** Если последовательно отразить прямоугольник относительно трех его сторон, то контур четырехугольника превратится в ломаную, концы которой соединяет отрезок — удвоенная диагональ. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда стороны вписанного четырехугольника удовлетворяют условию «угол падения равен углу отражения».



**Замечание.** Решение этой задачи, приведенное в австралийском сборнике, содержит грубую (и очень забавную) ошибку. Автор решения возво-

дит периметр четырехугольника в квадрат, а затем без труда доказывает, что этот квадрат больше *удвоенного квадрата диагонали*.

**5. Указание.** Если число делится на 9, то сумма его цифр — либо 9, либо 18 (единственное исключение — число 999).

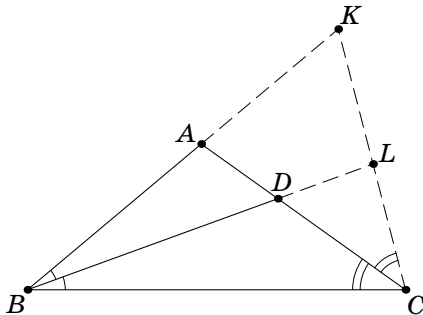
**6. Указание.** Из параллельности  $AB$  и  $CF$  следует равенство площадей треугольников  $ABC$  и  $ABF$ . Аналогично доказывается равенство площадей еще двух пар треугольников (каких?). Теперь надо просто разрезать треугольники  $ACE$  и  $BDF$  на равные части.

**8. Решение.** Проведем прямую, симметричную  $BC$  относительно  $AC$ , и пусть  $K$  и  $L$  — точки ее пересечения с продолжениями  $BA$  и  $BD$  соответственно (см. рисунок). Имеем:

1) В треугольнике  $BCL$  два угла равны  $20^\circ$  и  $80^\circ$ , поэтому он равнобедренный,  $BC = BL$ .

2)  $BL$ ,  $CA$  — биссектрисы в треугольнике  $BCK$ , поэтому  $D$  — точка пересечения биссектрис и равно отстоит от  $BK$  и  $CK$ .

3) Все углы четырехугольника  $ADLK$  легко вычисляются. В частности, в нем  $\angle A = 80^\circ$ ,  $\angle L = 100^\circ$ , откуда видно, что  $AD = DL$ ,  $BD + AD = BD + DL = BL$ .



**10. Решение.** Нет. При каждом преобразовании остатки от деления на 3 числа хамелеонов каждого цвета уменьшаются на 1 (одновременно), поэтому не могут сразу два из этих чисел стать равными 0.

**13. Решение.** Нет, так как при любой замене суммарная длина отрезков уменьшается.

**14. Решение.** Имеется  $5 \cdot 6 = 30$  пар «исполнитель-слушатель». За один концерт можно реализовать не более 9 пар (если трое выступают, и трое слушают). Поэтому трех концертов недостаточно. Четырех достаточно; нужно только, чтобы каждый музыкант

выступил дважды, и никакая пара не выступала сразу в двух концертах. Например, пусть в первом концерте выступают  $A, B, C$ , а в последующих —  $A, D, E$ , затем  $B, D, F$  и  $C, E, F$ .

**17. Указание.** Разности вида  $B_2 - B_1, B_3 - B_2, \dots, B_{100} - B_{99}$  — это исходные числа, т. е. они дают 99 разных остатков от деления на 100. Поэтому числа  $B_1, B_2, \dots, B_{100}$  не могут давать слишком мало разных остатков при делении на 100 (если бы их было только 10, то ненулевых разностей всего лишь 90).

**18. Указание.** Найдите три точки пересечения трех диагоналей, которые не лежат ни на каких других диагоналях. Произведение чисел в этих точках всегда будет положительным.

**Ответ.** Нет.

**20. Решение.** Выберем цвета 1, 2, 3 и раскрасим диагонали квадрата, начиная от угла, в цвета 1, 2, 3 (первая, четвертая, седьмая и т. д. — цвет 1, вторая, пятая и т. д. — цвет 2, третья и т. д. — цвет 3). Очевидно, плитка  $1 \times 3$  покрывает по одной клетке каждого цвета. Поскольку цвет 1 имеют 17 клеток, а цвет 2 и 3 по 16, получается, что плитка  $1 \times 1$  должна лежать на клетке цвета 1, т. е. на 1-й диагонали (т. е. в углу), 4-й или 7-й (10-я и 13-я симметричны 1-й и 4-й). Теперь сделаем аналогичную операцию с диагоналями другого направления; получим тот же результат. Остается посмотреть, какие клетки имеют цвет 1 при обоих раскрасках.

**Замечание.** Верно даже, что плитка  $1 \times 1$  лежит либо в центре, либо в углу, либо на середине одной из сторон.

**21. Решение.** Очевидно, высота, биссектриса и медиана выпущены из разных вершин (будем считать — из  $A, B$  и  $C$  соответственно). По условию  $AO = BO$ . Пусть  $K$  — основание медианы, тогда  $AK = BK$ , и треугольники  $AOK, BOK$  равны по трем сторонам. Отсюда вытекает, что медиана перпендикулярна стороне, т. е. совпадает с высотой, и треугольник равнобедренный. Дальнейшее уже просто.

**22. Решение.** Проведем 34 взвешивания различных пар монет. Все монеты разобьются на два подмножества: «тяжелые» — «легкие». Теперь можно за 33 взвешивания выбрать самую тяжелую монету среди «тяжелых» (одно взвешивание позволяет отбросить одну из монет, как заведомо «не ту»), и еще за 33 — самую легкую.

**23. Указание.** Докажите сначала, что  $x = y = z$ .

**24. Решение.** Если исходная перестановка кузнечиков была четной (123), то после нечетного числа прыжков она станет нечетной (132, 213 или 321).

**25. Указание.** В последовательности нет чисел, делящихся на 3.

**Ответ.** Нет.

**26. Указание.** Точка  $D$  лежит на дуге окружности с центром  $B$ , так как угол  $B$  вдвое больше, чем угол  $50^\circ$ , дополняющий  $130^\circ$  до  $180^\circ$ .

**Замечание.** То, что ответ должен быть равен единице (если он имеет какой-то смысл), ясно из того, что точка  $D$ , во всяком случае, лежит на дуге  $AC$ , и ее можно выбрать сколь угодно близко к точке  $A$  (или к точке  $C$ ), не нарушая условия на угол  $D$ .

**Ответ.** 1.

**27. Решение.** Ясно, что можно взять числа  $1, 5, 9, \dots, 1985$  (тогда каждая разность делится на 4 и заведомо не проста). Улучшить этот набор невозможно. В самом деле, интервал между числами не может равняться 2 или 3, если же взять два числа подряд (что допустимо), то интервал до следующего числа должен быть не менее 8. Таким образом, интервал между  $a_k$  и  $a_{k+2}$  всегда будет не меньше 8, а при таком ограничении выбранный набор оптимален.

**28. Решение.** Из последнего неравенства следует, что число отрицательных чисел в наборе четно, т.е. равно 0 или 2. Допустим, что имеется два отрицательных числа. Можно считать, что это второе и третье числа; изменим у них знак, тогда наши неравенства приобретут такой вид:

$$a - b - c > 0, \quad -ab + bc - ca = bc - a(b + c) > 0,$$

или же:

$$a > b + c, \quad bc > a(b + c),$$

при этом числа теперь положительны. Но из первого неравенства ясно, что во втором каждый множитель слева меньше соответствующего множителя справа, и второе неравенство неверно.

*Другое решение.* Составить кубическое уравнение, для которого  $a, b, c$  являются корнями, и убедиться, что оно не может иметь отрицательных корней.

**30. Решение.** Пусть сторона исходного квадрата равна 1, и пусть  $a$  — наибольшая из сторон четырех прямоугольников, прилегающих к большому квадрату. Поскольку все площади равны, его другая сторона  $b$  является наименьшей. Но тогда у соседне-



го с ним прямоугольника сторона равна  $1 - b$ , и поскольку  $b$  — наименьшая, она должна быть наибольшей, т.е. равняться  $a$ . Дальнейшие рассуждения стандартны.

**31. Решение.** Проведем биссектрису  $CD$ ; она делит сторону  $c$  на два отрезка  $AD$ ,  $BD$ . Из треугольника  $CBD$  имеем:

$$\frac{a}{\sin \angle CDA} = \frac{BD}{\sin(\angle C/2)}, \quad a \cdot \sin(\angle C/2) \leq BD.$$

Аналогично получаем  $b \cdot \sin(\angle C/2) \leq AD$ . Остается сложить эти неравенства.

**32. Указание.** Равенство выполняется тогда и только тогда, когда  $A + 1/A$  равно целому числу, причем  $A$  не целое. Поскольку уравнение  $A^2 - nA + 1 = 0$  при  $n > 2$  не может иметь рациональных корней, ответ на второй вопрос отрицательный. В качестве примера (пункт а) требуется только решить это уравнение, например, при  $n = 3$ .

**33. Решение.** Поскольку учеников меньше, чем кружков, есть ученик (обозначим его  $A$ ), который участвует не менее чем в 4 кружках:  $K_1, K_2, \dots, K_r$ . Предположим, что условие задачи неверно, тогда любые два из этих 4 (или больше) кружков пересекаются ровно по 2 ученикам. Легко убедиться, что это возможно лишь в том случае, если все они, кроме  $A$ , содержат также одного и того же ученика  $B$  (заметьте, что это было бы неверно, если бы таких кружков было только 3; тогда они могли бы состоять из учеников  $ABC, ABD$  и  $ACD$ ). По соображениям симметрии,  $A$  входит во все кружки, в которых участвует  $B$ . Таким образом, состав этих кружков:  $K_1 = \{A, B, C_1\}$ ,  $K_2 = \{A, B, C_2\}$ ,  $\dots$ ,  $K_r = \{A, B, C_r\}$ , причем ни  $A$ , ни  $B$  не участвует ни в каком другом кружке.

Теперь заметим, что также и  $C_1, \dots, C_r$  не участвуют в других кружках (иначе два кружка пересекались бы ровно по 1 человеку). Отбросим эти кружки и их участников; осталось  $30 - r$  учеников, которые участвуют в  $33 - r$  кружках. Кружков больше, чем их участников, и легко завершить рассуждение по индукции.

**35. а) Ответ.** Да, возможно (постройте пример).

**б) Решение.** Пусть таблица каким-то образом заполнена. Построим граф с 30 вершинами: десять — это цифры  $0, 1, \dots, 9$ , а остальные 20 — строки и столбцы таблицы. Соединим ребром вершину-число с вершиной-строкой или вершиной-столбцом, если это число встречается в строке (столбце). Легко видеть, что из каждой вершины-числа исходит не менее 7 ребер. Отсюда сразу

следует, что в одну из вершин второго типа входит не менее 4 ребер.

**36. Решение.** Длина проекции куба равна сумме проекций трех ребер (возможно, одна или две из них равны 0). Точно так же площадь проекции равна сумме площадей проекций трех квадратов. Остается заметить, что эти величины равны почленно, поскольку при проектировании и длина ребра, и площадь перпендикулярной ему грани умножаются на косинус одного и того же угла.

**37. Ответ.** а) Да, б) нет.

**Решение.** Утверждение «положения радиуса делят круг на  $N$  равных секторов», очевидно, равносильно утверждению «все положения радиуса после 1, 2, ...,  $(N-1)$  секунд различны».

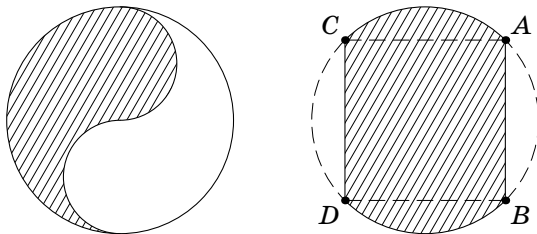
Легко видеть, что через  $k$  секунд радиус будет повернут на угол  $k(k+1) \cdot 180^\circ/N$ . Для того чтобы какие-то два положения совпали, требуется, чтобы разность

$$k(k+1) - r(r+1) = (k-r)(k+r+1)$$

делилась на  $2N$ , причем оба числа  $k, r$  должны быть меньше  $N$ .

Отсюда легко следуют оба пункта задачи. В самом деле, числа  $k-r$  и  $k+r+1$  — разной четности. Если  $N$  не является степенью двойки, то число  $2N$  имеет нечетный множитель, и легко подобрать нужные  $k, r$  (например,  $N=96$ ;  $(k-r)(k+r+1) = 192 = 3 \cdot 64$ ; пусть  $k-r=3$ ,  $k+r+1=64$ , тогда  $k=334$ ,  $r=30$ ). Если же  $N$  — степень двойки, то нечетный множитель должен равняться 1, а четный —  $2N$ , что невозможно.

**39. Ответ.** Можно. Примеры как для невыпуклых фигур, так и для выпуклых см. на рисунке.



**40. Решение.** а), б) Будем называть квадрат или куб «домом», а прямоугольники или параллелепипеды — «кирпичами». Приме-

ним индукцию по числу кирпичей (если их 2, то утверждение очевидно).

Заметим прежде всего, что от любого кирпича  $\alpha$  легко построить цепь, выходящую на границу дома (берем кирпич  $\delta$ , прилегающий к  $\alpha$  с нужной стороны, затем — прилегающий к  $\delta$ , и т. д.) Поэтому достаточно рассматривать случай, когда два интересующих нас кирпича лежат в противоположных углах дома; в противном случае мы можем «срезать» часть квадрата или куба, тем самым уменьшив число кирпичей (часть кирпичей при этом окажется разрезана пополам, но это не влияет на наши рассуждения), и применить индукцию.

Итак, пусть кирпичи  $\alpha$ ,  $\beta$  находятся в противоположных углах. Пусть  $A$  — ближайшая к  $\beta$ , т. е. наиболее удаленная от угла, вершина  $\alpha$  и  $\gamma$  — тот из прилегающих к вершине  $A$  кирпичей, который целиком находится в одном квадранте (на плоскости) или октанте (в пространстве). Поскольку  $\gamma$  не лежит в углу, мы можем вновь применить прием «срезания», отрезать лишние кирпичи (в их число, во всяком случае, входит  $\alpha$ ) и, применяя индукцию, считать, что некая цепь  $(\gamma - \lambda - \dots - \mu - \nu - \beta)$ , связывающая  $\gamma$  и  $\beta$ , уже построена. Теперь легко убедиться, что в зависимости от того, как эта цепь расположена, кирпичи  $\alpha$  и  $\beta$  соединяет либо цепь  $(\alpha - \gamma - \lambda - \dots - \mu - \nu - \beta)$ , либо цепь  $(\alpha - \lambda - \dots - \mu - \nu - \beta)$ , т. е. та же цепь, из которой, может быть, нужно выбросить  $\gamma$ .

## VII Турнир городов (1985/86)

**1. Решение.** Очевидно, есть команда  $A$  с четырьмя, по меньшей мере, выигрышами. Пусть она выиграла у  $B, C, D, E$ , тогда одна из этих команд (допустим,  $B$ ) выиграла, по меньшей мере, у двух других (скажем,  $C, D$ ). Поэтому либо  $(A, B, C, D)$ , либо  $(A, B, D, C)$  — искомая четверка.

**2. Ответ.** А) Нет, даже если мышка будет «подыгрывать» кошке (если раскрасить узлы в черный и белый цвет, то после хода кошки мышка и кошка всегда будут в узлах разного цвета).

Б) Да. Для этого кошка должна сначала пройти по косому пути; после этого она может гнать мышку в угол.

В) Нет, мышка может держаться симметрии относительно центра лабиринта.

**3. Указание.** Разность  $S_1 + S_2 + S_3 - S$  равна сумме площадей трех сегментов, отсеченных касательными, минус площадь большого круга.

**4. Решение.** Предположим, что разность все время была меньше 1 мин 51 с. Тогда игравший белыми думал над первым ходом меньше, чем 1 мин 51 с, а над каждым последующим — меньше, чем 3 мин 42 с (иначе либо в момент, когда он начал думать над ходом, либо когда закончил, разность была бы больше). Следовательно, всего он потратил на 40 ходов меньше, чем

$$1 \text{ мин } 51 \text{ с} + 39 \cdot 3 \text{ мин } 42 \text{ с} = 2 \text{ ч } 26 \text{ мин } 9 \text{ с}.$$

Отсюда же видно, как построить пример, когда разность часов все время была меньше 2 мин. Если разность все время составляла 2 мин, то игравший белыми думал над первым ходом 2 мин, а над остальными — по 4 мин, следовательно, всего он думал 158 мин, или 2 ч 38 мин (для черных — то же самое). Теперь сократим время раздумий каждого из партнеров над каждым ходом на несколько секунд так, чтобы суммарное время уменьшилось на 16 мин.

**5. Указание.** Назовем игроков  $A$  и  $D$ . Если у  $D$  в первый раз выпал орел, то благоприятными являются случаи, когда в остальных 10 бросаниях у  $D$  выпало не меньше орлов, чем у  $A$ . Если же у  $D$  в первый раз выпала решка, то благоприятными являются «наоборот» те случаи, когда в остальных 10 у  $A$  выпало меньше, чем у  $D$ .

**Ответ.**  $1/2$ .

**6. Решение.** Из формулы для  $x_{k+1}$  мы видим, что

$$\frac{1}{x_{k+1}} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_k + 1}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{x_k + 1} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}.$$

Отсюда сразу получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \dots + \frac{1}{x_{100} + 1} &= \\ &= \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) + \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{x_{100}} - \frac{1}{x_{101}} \right) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{101}} = 2 - \frac{1}{x_{101}}. \end{aligned}$$

**Ответ. 1.**

**7. Решение.** а) Из условия 2) следует, что любая фигура имеет какие-то определенные 20 ходов (скажем, один — на 1 поле влево и на 2 поля вверх, как шахматный конь, второй — на 13 полей влево и на 18 вниз, и т. д.). Отсюда следует, что она бьет данное поле только с полей, соответствующих «обратному ходу»: на 1 поле вправо и на 2 вниз; на 13 вправо и на 18 вверх, и т. д., то есть также не более чем с 20 полей.

б) Поставим теперь на доску первую фигуру  $A$  произвольно и попытаемся поставить вторую фигуру  $B$  так, чтобы они не били друг друга. Очевидно, для фигуры  $B$  «запретны» поле, где стоит  $A$ , поля, находящиеся под боем  $A$ , и поля, с которых  $B$  бьет  $A$  — всего не более чем 41 поле. Затем ставим третью фигуру, и т. д. Очевидно, для 20-й фигуры  $Z$  запретны 19 полей, уже занятых предыдущими фигурами, и  $400 + 400$  полей, битых этими фигурами или тех, с которых  $Z$  их бьет. Таким образом, фигуру  $Z$  все еще есть куда поставить.

**8. Решение.** Диагональ  $AC$  делит четырехугольник на два треугольника  $ACB$  и  $ACD$ . Пусть, для определенности, точка  $M$  лежит внутри или на границе треугольника  $ACB$ . Тогда  $MA + MC \leq BA + BC$ . Аналогично предположим, что  $M$  лежит внутри или на границе  $ABD$  (а не  $ACD$ ), тогда  $MB + MD \leq AB + AD$ . Таким образом, сумма расстояний от  $M$  до вершин не превосходит  $2AB + BC + AD$ . Остается воспользоваться очевидным (и весьма грубым) неравенством  $AB < AC + CD + DB$ .

**12. Указание.** а) Следует сначала доказать, что если точка  $O$  лежит внутри треугольника, то его вершины образуют с  $O$  по крайней мере два неострых угла (база индукции для  $N = 3$ ). Для того чтобы затем провести индукцию, требуется доказать еще два утверждения:

1) каждая из точек  $A_1, \dots, A_N$  «участвует», по меньшей мере, в одном неостром угле;

2) если  $N > 3$ , то можно выбросить одну из точек с тем, чтобы  $O$  по-прежнему лежала внутри  $(N-1)$ -угольника.

Задача б) решается точно так же, с той разницей, что доказательство базы индукции (при  $N=4$  имеется по крайней мере 3 неострых угла) технически несколько сложнее.

**13. Указание.** В точке  $E$  пересекаются прямые  $AC$ ,  $BE$  и  $HE$ . По условию  $BE$  — биссектриса угла  $B$ . Докажите, что  $AC$  — биссектриса внешнего угла  $A$  в треугольнике  $ABH$ . Тогда и  $HE$  — биссектриса внешнего угла  $H$ , и, поскольку этот угол прямой,  $\angle EHC = 45^\circ$ , что и требуется.

**14. Указание.** Для любых двух фигур  $A$ ,  $B$  доля позиций, в которых  $A$  бьет  $B$ , составляет не более  $20/9999$  среди всех возможных позиций. В то же время число пар фигур составляет  $20 \cdot 19 = 380$ .

**Замечание.** Рассуждение задачи 7 здесь не проходит: если «битые поля» не сдвигаются вместе с фигурой, то вполне возможно, например, что то поле, на которое уже поставлена фигура  $A$ , фигура  $B$  бьет с любого поля доски.

**15. Решение.** Пусть  $K$ ,  $L$  — точки пересечения проведенных прямых с  $BC$  и  $AC$  соответственно, и пусть  $AK$  и  $BL$  пересекаются в точке  $O$ . Предположим, что треугольники  $ABO$ ,  $BOK$ ,  $AOL$  равновелики, тогда  $AO$  и  $BO$  — медианы треугольников  $ABL$  и  $ABK$  соответственно. Но тогда  $ABKL$  — параллелограмм, а это означает, что прямые  $AL$  и  $BK$  не пересекаются. С другой стороны, они пересекаются в точке  $C$ . Противоречие.

**16. Указание.** Число не может делиться одновременно на 5 и на 2. С другой стороны, число ...13 679 248 (первые цифры не определены, их следует еще дописать слева) заведомо делится на 8, а следовательно, на 2 и 4. Делимость на 9 (а тем самым на 3 и 6) определяется суммой цифр, которую можно обеспечить за счет первых цифр. С делимостью на 7 разберитесь сами.

**Ответ.** 8.

**17. Решение.** Раскрасим все перекрестки в три цвета (вдоль каждой улицы в порядке  $xuzxuzx\dots$ , таким образом, чтобы каждый треугольник имел вершины трех разных цветов). Машина, проехав сторону  $xu$ , либо едет дальше прямо, либо сворачивает в третью вершину одного из треугольников, примыкающих к стороне  $xu$ . Поэтому в любом случае после вершин  $x$ ,  $y$  машина

попадает в вершину, раскрашенную в цвет  $z$ ; далее она, очевидно, опять попадает на цвет  $x$ , и т. д. Таким образом, обе машины едут только в направлениях  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow z$ ,  $z \rightarrow x$  и никогда — в противоположных, откуда и следует отрицательный ответ на вопрос задачи.

**18. Решение.** Обозначим эту точку  $N$  и подсчитаем углы. Поскольку точки  $A, K, M, N$  лежат на одной окружности,  $\angle ANM = \angle AKM = \angle CLM$ . Поскольку  $\angle CLM + \angle CNM = \pi$ , то также и  $\angle ANM + \angle CNM = \pi$ . Это и значит, что точки  $A, N, C$  лежат на одной прямой.

**Замечание.** Эти формулы написаны в предположении, что точки  $N$  и  $K$  лежат на одной дуге первой окружности (по отношению к точкам  $A, M$ ). Если это не так, то все наоборот:  $\angle ANM + \angle AKM = \pi$ , а  $\angle CLM = \angle CNM$ .

**19. Указание.** Все команды можно разбить на несколько цепочек вида  $ABCD \dots E$  таким образом, что в первый день команда  $A$  играла с  $B$ , во второй день  $B$  с  $C$ , в третий день  $C$  с  $D$  и т. д. Поскольку цепочка должна замкнуться, в ней обязательно будет четное число команд. Остальное очевидно.

**20. Указание.** Аид может очередным ходом добиться того, что после его хода

- 1) самая нижняя ступенька занята и
- 2) нигде нет подряд двух пустых ступенек.

(Заметим, что Сизиф своим ходом может создать только одно место, где есть две пустые ступеньки подряд.) Но отсюда следует, что после хода Аида самый верхний камень лежит, в лучшем случае, на 999-й ступеньке, и Сизиф не сможет поднять камень на 1001-ю ступеньку.

**Ответ.** Сизифов труд бесплоден.

**21. Решение. в), г)** Выделим в неделе для каждого ученика «приемные дни», когда он не выходит из дому. Ясно, что все смогут побывать в гостях у всех, если (и только если) никакие два множества «приемных дней» разных учеников попарно не содержатся одно в другом. Для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы каждое из этих множеств состояло ровно из 3 дней. Остается заметить, что  $C_7^3 = 35 \geq 30$ .

**а), б)** При четырех вечерах имеется всего лишь 16 вариантов «приемных дней», так что у каких-то двух человек «приемные дни» непременно совпадут. При пяти имеется 32 варианта, но два

из них заведомо не годятся (все 5 дней или ни одного), так что пришлось бы брать *все* остальные варианты, а это не подходит.

**Замечание.** Шести вечеров тоже недостаточно. Но здесь надо аккуратно сосчитать, сколько именно можно выбрать подмножеств в множестве  $\{1, \dots, 6\}$  так, чтобы они не содержались одно в другом. Ответ: максимально 20 (если взять все 3-элементные подмножества).

**22. Решение.** Обозначим эту величину  $X_k$  и рассмотрим отношение

$$\frac{X_{k+1}}{X_k} = \frac{(k+1)^2}{1,001k^2} = \frac{1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}}{1,001}.$$

Величина  $X_k$  возрастает, пока эта дробь больше 1. Легко сообразить, что это верно, пока  $k \leq 2000$ .

**Ответ.** При  $k = 2001$ .

**24. Указание.** Рассмотрите проекции этих векторов на высоту тетраэдра.

**Ответ.** Нет.

**25. Решение.** Добавив к обеим частям  $F(x)$ , мы можем преобразовать данное равенство к виду  $(F(x+1)+1) \cdot (F(x)+1) = F(x)$ . Из него видно, что  $F(x)$  не может принимать ни значения  $-1$ , ни значения  $0$  (если  $F(x) = 0$ , то один из сомножителей левой части равен  $0$ , откуда либо  $F(x+1) = -1$ , либо  $F(x) = -1$ , а это, как мы уже знаем, невозможно).

Остается рассмотреть три случая:

1)  $F(x) < -1$ ,    2)  $-1 < F(x) < 0$ ,    3)  $0 < F(x)$ .

Во всех трех случаях мы без труда убеждаемся, что  $F(x+1)$  попадает в другой интервал (например, в первом случае  $F(x+1)+1$  должно быть положительным), а это, по теореме Коши, означает разрывность функции  $F(x)$ .

**26. Указание.** Докажите сначала, что треугольники  $OKB$  и  $OCD$  равны.

**27. Указание.** Простейшее доказательство — по индукции (при переходе от  $k$  к  $k+1$  к левой части добавляется больше, чем к правой части).



## VIII Турнир городов (1986/87)

1. Ответ. 34 и 17.

2. Решение. Проведем диаметры окружности, параллельные сторонам квадрата. Каждый из них делит лежащие вне квадрата дуги окружности пополам. Поэтому сумма дуг  $EF$  и  $IJ$ , как и сумма дуг  $GH$  и  $KL$ , есть разность между двумя противоположными четвертями окружности и половинками дуг, лежащих вне квадрата. Отсюда следует утверждение пункта а). Что же касается утверждения пункта б), то легко установить почленное равенство прямолинейных сторон наших треугольников.

3. Решение. Начинаящий выиграет, если первым ходом поделит шоколадку на две части размером  $6 \times 5$  (можно также  $3 \times 10$ ) и дальше, когда партнер делает операцию с одной из половинок или одной из частей, из нее образованных, — если можно получить дольку  $1 \times 1$ , он ее получает и выигрывает, если же нет — делает ход, аналогичный ходу партнера, на другой половинке.

Замечание. В австралийском сборнике приводится другое условие: игрок делит шоколадку на части и выбрасывает одну из частей. Это меняет весь смысл задачи.

4. Ответ.  $(1 + 1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{N}\right) - 1 = N$ .

5. Ответ. Внутренность круга, концентричного данному, но втрое большего радиуса.

6. Решение. Допустим противное. Тогда ровно половину возможных очков набрала не более чем одна команда, и следовательно, либо 14 команд набрали больше половины возможных очков, либо 14 набрали меньше половины. Для определенности пусть верно первое. Тогда одна из этих команд выиграла по меньшей мере 1 матч, вторая — по меньшей мере 2, и т.д. Всего они выиграли не менее  $1 + 2 + \dots + 14 = 105$  матчей, тогда как всего в турнире сыграно 378 матчей.

Замечание. Это доказательство (а тем самым и утверждение задачи) верно независимо от числа команд. Правда при нечетном числе надо считать чуть-чуть точнее, при четном — оценка грубее.

7. Решение. Будем считать, что в каждом столбце и в каждой строке есть клетки как синего, так и красного цвета (если это не так, например, один из столбцов целиком синий, то очевидно, что ферзь может обойти все синие клетки).

Попытаемся доказать, что ферзь может обойти все синие клетки, индукцией по строкам. Основание индукции проходит: ферзь может обойти все синие клетки первой строки. Предположим, тем не менее, что индукция не проходит; это значит, что существует такое  $k$ ,  $1 \leq k \leq 8$ , что ферзь может обойти все синие клетки первых  $k$  строк, но не может попасть на  $(k+1)$ -ю строку с  $k$ -й.

Тогда проведем индукцию для красного цвета по столбцам, и опять-таки предположим, что она не проходит, т. е. ферзь может обойти все красные клетки первых  $r$  столбцов, но не может попасть в  $(r+1)$ -й столбец с  $r$ -го.

Для решения задачи остается доказать, что наши предположения противоречивы. А для этого достаточно рассмотреть квадрат  $2 \times 2$ , образованный пересечением  $k$ -й,  $(k+1)$ -й строк и  $r$ -го,  $(r+1)$ -го столбцов. Легко убедиться, что, как бы он ни был раскрашен, одно из сделанных нами предположений (из  $k$ -й строки нельзя по синим клеткам попасть в  $(k+1)$ -ю; из  $r$ -го столбца нельзя по красным клеткам попасть в  $(r+1)$ -й) ошибочно.

**8. Указание.** Следует доказать два вспомогательных утверждения:

- 1) площади треугольников  $ABM$  и  $DCM$  равны;
- 2) отрезок  $OM$  ( $O$  — центр вписанной окружности) параллелен  $AB$ . Остальное очевидно.

**Ответ.**  $r^2$ .

**9. Ответ.** Да. На самом деле достаточно взять 5 подходящих прогрессий с разностями 2, 4, 3, 6, 12 (три последние прогрессии покрывают все числа, делящиеся на 4).

**10. Ответ.** Существуют. Например, можно взять последовательность треугольников, площади которых быстро убывают (например, площадь первого равна 1, второго — 0,1, третьего — 0,01 и т. д.), а наибольшие стороны, напротив, возрастают (у первого 1, у второго 10, у третьего 100 и т. д.).

**11. Решение.** По модулю 1987 справедливы сравнения:

$$1986 \equiv -1; \quad 1984 \equiv -3; \quad 1982 \equiv -5 \quad \text{и т. д.}$$

Соответственно

$$1986!! \equiv (-1)(-3) \dots (-1985) = (-1)^k 1985!!,$$

где  $k$  — число сомножителей. Остается заметить, что  $k$  нечетно.

**13. Решение.** Отметим для начала произвольные 32 клетки, занумерованные разными числами. Невыбранные клетки будем

называть «свободными», а линии (строки или столбцы), где все клетки свободны, — пустыми.

Допустим, что какая-то линия (например, первая строка) пуста. Следовательно, в ней стоят 8 разных чисел, и в других строках отмечено 8 клеток с соответствующими числами.

Мы утверждаем, что одно из этих 8 чисел является не единственным ни в своей строке, ни в своем столбце, и следовательно, его можно заменить равным ему числом из первой строки, не «обнуляя» других строк или столбцов, т. е. уменьшить число пустых строк.

В самом деле, на всей доске, кроме первой строки, свободны только 24 клетки. Поэтому есть не более трех строк, в которых одно из 8 чисел стоит «в одиночестве», и не более четырех таких столбцов. Следовательно, одиноки в своей строке или столбце не более семи чисел, и хотя бы одно из наших 8 чисел действительно можно заменить.

Если после этого все еще есть пустые строки или столбцы, действуем аналогично.

**14. Решение.** Поскольку всего пар точек имеется 210, будем доказывать равносильное утверждение: количество дуг, угловая мера которых больше  $120^\circ$ , не больше 110.

Построим граф, в котором соединены те точки, для которых соответствующий угол больше  $120^\circ$ . Пусть  $E$  — число его ребер. Назовем кратностью точки число ребер, выходящих из этой точки, и обозначим его  $d(A)$ . Очевидно,  $\sum d(A) = 2E$  (каждое ребро в левой части учтено дважды).

Ясно, что три точки  $A, B, C$  не могут быть попарно соединены ребрами, т. е. в графе нет ни одного треугольника. Поэтому если  $A$  и  $B$  соединены ребром, то  $d(A) + d(B) \leq 21$ .

Выберем точку  $A$ , для которой  $d(A) = k$  максимально. Пусть она соединена с точками  $C_1, \dots, C_k$ . Таким образом, для любой точки  $B$  верно неравенство  $d(B) \leq k$ .

Теперь оценим общее число ребер отдельно для точек  $C_1, \dots, C_k$  и отдельно для остальных точек. Из неравенства  $d(A) + d(C_i) \leq 21$  следует, что  $\sum d(C_i) \leq k(21 - k)$  (первый сомножитель — число точек, второй — оценка кратности).

Однако легко заметить, что для остальных точек (не соединенных ребром с  $A$ , причем включая также и точку  $A$ ) справедлива точно такая же оценка:  $\sum d(B) \leq k(21 - k)$  — с той разницей, что на этот раз уже  $21 - k$  есть число точек, а  $k$  — оценка их кратности.

Складывая эти неравенства, мы получаем, что  $2E \leq k(21 - k) + (21 - k)k$ , или  $E \leq k(21 - k)$ .

Остается убедиться в том, что ни при каком целом  $k$  произведение  $k(21 - k)$  не может превышать 110.

**Замечание.** 1) Задача носит, по существу, комбинаторный, а не геометрический характер. Ее можно было бы переформулировать так: оценить число ребер в графе с 21 вершиной, если известно, что в графе нет треугольников.

2) Оценка является точной. Если 11 точек лежат по одну сторону окружности вблизи друг от друга, а 10 оставшихся — по другую сторону, тоже близко друг от друга, то  $E = 110$ .

3) Точно так же нельзя уменьшить угол  $120^\circ$ . Например, если  $\alpha = 119^\circ$ , то нетрудно построить пример, когда существует только 63 дуги, которые меньше  $\alpha$  (как?).

**15. Решение.** Раскрыв скобки в правой части, мы легко приводим данное неравенство к виду  $2(1 + a^4) \geq 2(a + a^3)$ , или, перенося все в левую часть,  $2(a - 1)(a^3 - 1) \geq 0$ . Последнее очевидно.

**16. Указание.** Утверждение « $KL$  параллельно  $AB$ » равносильно утверждению «высота  $CM$  треугольника  $ABC$  является в то же время высотой в треугольнике  $KLM$ ».

**Замечание.** В действительности из условия задачи вытекает, что треугольник  $ABC$  — равнобедренный.

**17. Указание.** Концентрация соли в первом сосуде всегда будет меньше, чем во втором.

**Ответ.** Нет.

**18. Указание.** Сторона квадрата равна удвоенной гипотенузе треугольника.

**Ответ.** Можно.

**19. Решение.** Нет. Квадрат любого нечетного числа имеет вид  $8k + 1$ . Поэтому сумма шести квадратов имеет вид  $8k + 6$ . Но число 1986 при делении на 8 дает остаток 2.

**20. Ответ.** Если точки  $A, B, C$  лежат по одну сторону от  $M$ , то  $d = a + c - b$  (если это число отрицательно, то, значит,  $D$  лежит по другую сторону). Если точки  $A, B, C$  лежат по разные стороны от  $M$ , то в равенстве надо кое-где изменить знаки (в зависимости от расположения).

**22. Указание.** Если разделить доску на 16 квадратиков  $2 \times 2$ , то сумма квадратов расстояний до черных и белых клеток каждого такого квадрата одинакова. Для доказательства достаточно вспомнить, что квадрат расстояния вычисляется по теореме

Пифагора и равен сумме двух квадратов — по горизонтали и по вертикали.

**23. Решение.** Нет. У Пети после любого числа операций останется нечетное число монет.

**24. Ответ.** а) Да, б) нет.

**Решение.** а) Проще всего взять симметричный восьмиугольник, у которого все углы по  $135^\circ$ , а стороны равны через одну (его можно получить, например, отрезав от квадрата 4 одинаковых уголка). Тогда указанные 8 четырехугольников делятся на две четверки равных между собой, и достаточно, чтобы один из них был описанным. Это легко достигается соответствующим выбором соотношения между сторонами восьмиугольника.

б) Если четырехугольников пять, то среди них два последовательных, например,  $ABCD$  и  $BCDE$ . Тогда центры обеих окружностей лежат на биссектрисе угла  $C$ , и легко убедиться, что если, например, первая окружность больше, то точка  $E$  лежит внутри четырехугольника  $ABCD$ . Если же они равны, то точки  $A$  и  $E$  совпадают.

**25. Решение.** И то, и другое невозможно. Вначале 6 фишек стоит в нечетных рядах (считая снизу), и они никогда не перейдут в четные. Между тем в верхних квадратах в нечетных рядах стоит 3 фишки, а 6 — в четных.

**26. Решение.** Утверждение задачи равносильно тому, что точка  $O$  равноудалена от обеих высот. Учитывая, что  $O$  равно отстоит от вершин  $B$ ,  $C$ , это, в свою очередь, равносильно равенству углов  $\alpha = \angle OBK$ ,  $\beta = \angle OCL$ .

Докажем это последнее равенство. Для этого заметим, что

1)  $\angle ABK = \angle ACL = 30^\circ$ ,

2)  $\angle BOC = 120^\circ$ , и поэтому оба угла  $\angle OBC$ ,  $\angle OCB$  тоже равны  $30^\circ$ . Наконец, принимая во внимание, что один из углов треугольника (пусть, для определенности, угол  $B$ ) больше  $60^\circ$ , а другой — меньше, мы видим, что  $\alpha = \angle B - 60^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ - \angle C$ , откуда и следует  $\alpha = \beta$ .

**27. Указание.** Существует способ, позволяющий несколькими операциями повернуть очередной кубик, т. е.  $(k+1)$ -й кубик из  $(r+1)$ -й строки, нужной гранью, не «портя» расстановку предыдущих, т. е. кубиков из первых  $r$  строк и первых кубиков  $(r+1)$ -й строки. Найдите его. Он хорошо известен тем, кто возился с кубиком Рубика.

**Ответ.** Это возможно.

**28. Указание.**  $P(a) - P(b)$  нацело делится на  $a - b$ .

**29. Указание.** Поскольку один из кругов должен покрывать центр круга, необходимо покрыть окружность 6 кругами, а поэтому хотя бы один из них должен покрыть дугу в  $60^\circ$  или более.

**Замечание.** Покрыть круг радиуса 1 шестью кругами радиуса  $1/2$  или даже немного больше тоже невозможно; для этого круги должны иметь радиус, по меньшей мере,  $1/\sqrt{3}$ .

**30. Указание.** Все самые сложные обмены разбиваются на «цепочки»: семья  $A$  переезжает в квартиру  $B$ ,  $B$  — в квартиру  $C$ ,  $C$  — в  $D$ , и так пока последний член цепочки  $Z$  не въедет в квартиру  $A$ . Поэтому достаточно доказать утверждение для одной цепочки.

**31. Решение.** Для доказательства итерируем многократно равенство

$$k = \sqrt{1 + (k-1)(k+1)}$$

для  $k = 3, 4, \dots$ . Получим цепочку равенств:

$$3 = \sqrt{1 + 2 \cdot 4} = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3 \cdot 5}} = \dots$$

$$\dots = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \dots \sqrt{1 + (n-1)(n+1)}}}}.$$

После преобразования числа 3 к такому виду неравенство становится очевидным, поскольку каждая скобка увеличилась.

*Другой метод.* Зафиксируем  $n$  и докажем индукцией по  $k$  неравенство

$$\sqrt{(n-k)\sqrt{(n-k+1)\dots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}} < n-k+1.$$

**32. Указание.** Следует прежде всего доказать, что  $\angle MDE = \angle CMD + 30^\circ$  (при этом нужно воспользоваться тем, что четырехугольник  $MDCE$  вписанный), аналогично  $\angle MDF = \angle BMD + 30^\circ$ . Отсюда легко следует решение даже более общей задачи, а именно: найти геометрическое место таких точек, что один из углов равен  $\alpha$ .

**Ответ.** Точка  $M$  лежит на одной из трех дуг, опирающихся на стороны треугольника, при этом соответствующий угол (например,  $\angle BMC$ ) равен  $\alpha + 60^\circ$ . Для нашей задачи угол должен быть равен  $150^\circ$ , и эти дуги касаются друг друга в точках  $A, B, C$ .

---

**33. Ответ.** Выигрывает второй. Для победы ему достаточно разбить доску на пары полей, связанных ходом коня (это легко сделать самыми разными способами), и если первый поставил коня на одно поле из пары — переставлять его на второе. Таким образом, у второго всегда есть ход, следовательно, когда-нибудь ходы кончатся у первого.

## IX Турнир городов (1987/88)

**1. Указание.** Так как последняя цифра — всегда 1, 3, 7 или 9, то при очередном умножении на 3 в следующий разряд переносится либо 0 (если последняя цифра 1 или 3), либо 2.

**2. Ответ.** Объединение диагоналей ромба.

**3. Решение.** Числа 1987 сможет достичь тот из игроков, кто перед этим будет достигать чисел (в обратном порядке)

993; 496; 248; 124; 62; 31; 15; 7; 3.

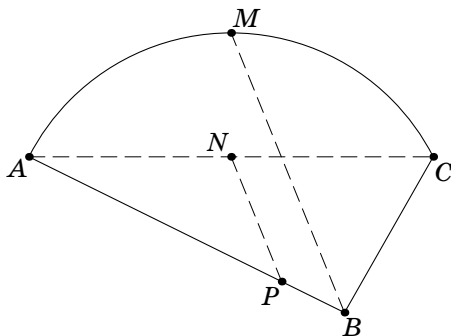
Отсюда ясно, что начинающий выигрывает.

**Замечание.** Вообще говоря, начинающий выигрывает, если двоичная запись числа, которого нужно достичь, начинается с цифр 11..., и проигрывает, если она начинается с цифр 10... В частности,

$$1987_2 = 11111000011,$$

поэтому начинающий выигрывает.

**4. Решение.** Пусть  $M$  — середина дуги  $AC$ ,  $N$  — середина хорды  $AC$ . Будем для определенности считать, что  $AB > BC$ , и проведем из  $N$  прямую параллельно  $MB$  до пересечения с  $AB$  в некоторой точке  $P$ . Прямая  $MP$  и является искомой.



**5. Решение.** а) Достаточно заметить, что

$$\begin{aligned}(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b+c) &= \\ &= 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4).\end{aligned}$$

б) Достаточно доказать, что

$$4(ab + bc + ca)^2 \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$



После раскрытия скобок и приведения подобных членов это неравенство сводится к очевидному:

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4) + 8(a^2bc + ab^2c + abc^2) \geq 0.$$

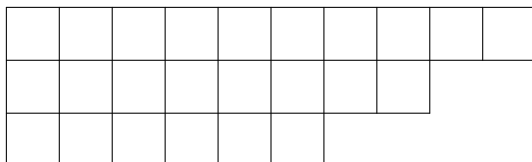
Таким образом, оценка пункта б) достаточно грубая, что подсказывает нам отрицательный ответ в пункте в). Действительно, легко найти контрпример: скажем,  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 3$ .

**6.** Допустим противное. Далее...

**Первое решение.** Разобьем непустые корзины на два класса: те, в которых не менее 10 яблок, и остальные. Первых имеется менее 10, и потому либо в одной из них более 100 яблок (тогда достаточно взять одну эту корзину), либо в них менее 1000 яблок. Вторых имеется менее 100 (иначе можно в каждой оставить по 1 яблоку), и потому в них также менее 1000 яблок. Противоречие.

**Второе решение.** Непустых корзин не более 99. Среди них не более 49 корзин, в которых лежит хотя бы 2 яблока; не более 33 корзин, в которых лежит хотя бы 3 яблока, и т. д.

Изобразим корзины рядами, а яблоки квадратиками, стоящими в этих рядах, причем расставим их по убыванию. Получится примерно такая картинка:



(общее число квадратиков равно 2000). Согласно сказанному, в первом столбце не более 99 клеток, во втором не более 49, и т. д. Общее число яблок не превосходит

$$99 + 49 + 33 + 24 + 19 + \dots,$$

и нетрудно убедиться, что сумма меньше 2000. Противоречие.

**Замечание.** В действительности речь идет об оценке для суммы

$$100\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right).$$

Вообще-то в скобках стоит расходящийся ряд, но так как нам нужно его просуммировать только до числа 99 (ни в одной корзине не может быть более 99 яблок), то требуется только доказать, что сумма первых 99 его членов меньше 20, а это — весьма грубая оценка.

Если же сосчитать сумму аккуратно, то оказывается, что она равна 473. Это означает, что 473 яблока еще можно разместить по корзинам так, чтобы утверждение задачи не выполнялось, а 474 яблок уже достаточно, чтобы оно было верно. Оценка 2000, таким образом, достаточно груба; первое решение состоит в том, чтобы оценить отдельно площадь первых 10 рядов и отдельно — первых 10 строк (а больше в таблице ничего нет).

А как аккуратно сосчитать сумму? На первый взгляд кажется, что придется складывать 100 слагаемых. Но в действительности достаточно просуммировать первые 9 (это площадь первых 9 столбцов), затем умножить на 2 (площадь первых 9 строк) и вычесть 81. (Почему?)

**7. Указание.** В качестве первой вершины  $K_1$  можно выбрать любую из вершин красного треугольника. После этого в качестве второй вершины нужно выбрать ту вершину  $X$  из шести вершин двух других треугольников, для которой  $\angle K_1MX$  максимален. Докажите, что в этом случае можно выбрать одну из вершин третьего треугольника так, чтобы условие выполнялось.

**8. Ответ.**  $S = \frac{1}{2} \sin^2 \gamma$ .

**9. Решение.** Сможет. Если бы учительница стояла не в вершине, мальчик мог бы сразу плыть к середине стороны, наиболее от нее удаленной. Поскольку же она стоит в вершине, ему достаточно сначала плыть к середине такой стороны (тогда учительница вынуждена немедленно бежать туда же), а через короткое время повернуть под прямым углом. Учительнице не успеть в соответствующую точку.

**10. Решение.** Поскольку требуется только привести пример, то можно просто сказать, что годятся числа Фибоначчи, взятые через одно: 2, 5, 13, 34, 89, ... Говоря точнее, каждая пара двух последовательных чисел из выписанных:

$$(2, 5), (5, 13), (13, 34), \dots$$

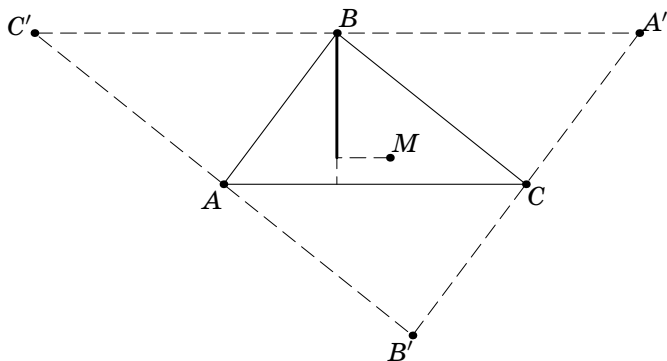
удовлетворяет условию.

В самом деле, для чисел Фибоначчи справедливо множество тождеств (которые все легко доказываются по индукции), в том числе и нужное нам тождество

$$\varphi_k^2 = \varphi_{k-2}\varphi_{k+2} - 1.$$

**11. Указание.** Проведем через точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  прямые, параллельные сторонам; они образуют треугольник  $A'B'C'$ , вдвое больший  $ABC$  и подобный ему. Докажите, что  $M$  равноудалена от

сторон треугольника  $A'B'C'$ . Таким образом, она является центром вписанной в него окружности, и радиус этой окружности равен диаметру окружности, вписанной в  $ABC$ . Дальнейшее очевидно.



**12. Решение.** Да, можно. Например, объявим пару белой, если максимальная степень двойки, на которую делится разность, четна (в частности, если разность нечетна, т.е. делится на нулевую степень), и черной, если она нечетна.

**13. Указание.** Рассмотрим какой-нибудь правильный шестиугольник, образованный из 6 треугольничков разбиения (такой всегда существует, если каждая сторона разделена хотя бы на 3 части). Предположим, что один из его треугольничков — черный. Тогда никаким набором перекрашиваний не удастся сделать все 6 его треугольников белыми.

**Ответ.** Нет, не всегда.

**14. Решение.** Поскольку милиционеров бесконечно много, можно их передвинуть таким образом, что по милиционеру будет стоять на каждом углу. После этого бандит будет обнаружен.

*Другое решение.* Снять с дежурства две трети милиционеров (пусть останется по одному милиционеру на 300 кварталов), и отправить освободившихся «прочесывать» одну за другой полосы ширины 300.

**15. Ответ.** 5.

**16. Указание.** Докажите, что треугольники  $AMC$ ,  $ANC$  равновелики.

**17. Решение.** В обоих случаях выигрывает тактика симметрии: следует делать ход, симметричный партнеру. Вопрос лишь

в том, кто из двух может ее применить. В случае а) начинающий может провести диагональ через центр, тем самым разбить десятиугольник на два одинаковых, а дальше держаться симметрии. Поэтому в случае а) выигрывает первый.

В случае б) противоположные вершины закрашены в один цвет, и такой ход невозможен. Поэтому второй может держаться симметрии (например, симметрии относительно центра) и выиграть.

**18. Решение.** Данную доску можно представить как «сумму двух досок», на первой из которых одинаковы все числа по столбцам (в каждом столбце стоят числа  $0, 8, 16, \dots, 56$ ), а на второй — по строкам (в каждой строке числа  $1, 2, \dots, 8$ ). Для каждой из досок в отдельности утверждение очевидно.

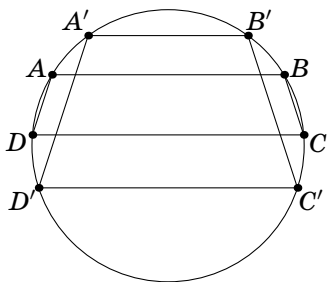
**19. Указание.** Если сумма состоит из сплошных девяток, то ни в одном разряде не произошло переноса в следующий разряд.

**Ответ.** Нет, нельзя.

**20. Указание.** Надо брать шары существенно разных радиусов (например,  $1, 10, 100, 1000$ ). Заметьте, что один шар может загородить источник почти от половины внешнего мира.

**Ответ.** Да.

**20а. Решение.** Пусть сначала основания одной трапеции параллельны основаниям другой; тогда трапеции расположены как на рисунке.



Параллельность сторон равносильна равенству соответствующих дуг, поэтому из условия задачи следует серия равенств дуг:  $AA' = DD'$ ;  $CC' = BB'$ . Сверх того,  $AD = BC$ ,  $A'D' = B'C'$ . Отсюда легко вывести, что диагонали стягивают равные дуги и, следовательно, равны.

Остается рассмотреть случай, когда основания одной трапеции параллельны боковой стороне второй. Он легко сводится к

первому; надо воспользоваться тем, что в этом случае, как в и первом, острые углы при основаниях обеих трапеций равны, а потому можно одну из трапеций повернуть так, чтобы свести все к рассмотренному случаю.

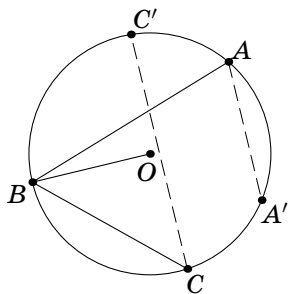
**21. Решение.** Положение прямой задается одной величиной  $x$ ,  $0 < x < 1$ . Рассмотрим те значения  $x$ , для которых данная прямая пересекает фиксированную окружность диаметра  $d$ ; такие  $x$  образуют интервал длины  $d$ . Суммарная длина всех таких интервалов, очевидно, равна  $10/\pi > 3$ . Поэтому есть точка, принадлежащая не менее чем 4 интервалам одновременно.

**21а. Решение.** Рассмотрим всевозможные пары 5-значных чисел  $(x, y)$ ; их  $(10^5 - 10^4)^2$ . Каждой паре соответствует число, которое не всегда 10-значно. Кроме того, если  $x \neq y$ , то двум парам  $(x, y)$  и  $(y, x)$  соответствует одно и то же число. Отсюда видно, что представимых 10-значных чисел существенно меньше половины.

**Ответ.** Непредставимых больше.

**22. Решение.** Конь не может даже обойти достаточно большой квадрат размером  $r \times r$ . В самом деле, в таком квадрате свободных белых полей больше, чем черных, примерно на  $r^2/16$  (эта формула является точной, если  $r$  делится на 4, и приближенной в противном случае). Поэтому он может обойти данный квадрат только так: побродив некоторое время по нему, выйти из него (обязательно через белое поле), затем поблуждать вне его и вернуться в него опять через белое, и так не менее чем  $r^2/16$  раз. Но для того чтобы выйти из квадрата, необходимо сначала оказаться на его «бордюре» шириной в 2 клетки. Площадь этого бордюра примерно равна  $8r$ , и при больших  $r$  она меньше, чем  $r^2/16$ .

**23. Решение.**  $a^4 + b^4 + c^4 = b^4 + c^4 + (b+c)^4 = 2(b^4 + 2b^3c + 3b^2c^2 + 2bc^3 + c^4) = 2(b^2 + bc + c^2)^2$ .



**24. Решение.** Пусть  $O$  — центр описанной вокруг  $ABC$  окружности, и точки  $A', C'$  симметричны  $A$  и  $C$  соответственно относительно прямой  $BO$ . Очевидно,  $A', C'$  также лежат на окружности. Тогда легко видеть, что  $CA'$  и  $AC'$  как раз и будут прямыми, симметричными  $AC$ ; и поскольку они расположены симметрично относительно  $BO$ , то их точка пересечения  $K$  лежит на оси симметрии.

**25. Указание.** Докажите сначала, что все неизвестные равны между собой. Пусть, например,  $x_1$  — наибольшее из чисел, тогда  $x_1 \geq x_2$ , и из первых двух уравнений следует, что  $x_3 \geq x_1$ .

**26. Решение.** Если на правой чашке все гири тоже различны, то все гири одинаковы (докажите!), и их поровну. Если же на правой чашке есть две одинаковые гири (например, по 16 г), то можно их заменить на одну гирю в 32 г. Равновесие не нарушится, а гиря на правой чашке станет меньше.

**27. Решение.** Достаточно найти способ расположить окружности так, чтобы через каждую точку проходило 2 окружности. Это можно, например, сделать так: центры окружностей радиуса 1 располагаются во всех точках каждой из прямых  $x = 2k$ ,  $k$  целое.

**28. Решение.** Заметим сначала, что если бы требовалось расставить не натуральные, а целые числа, и не в угле, а на всей плоскости, то решение было бы очевидным: в клетку  $(a, b)$  ставим число  $a + b$ . Причина того, что такой способ годится — в существовании операции, обратной к сложению: число  $c$  в строке номер  $a$  будет стоять на месте с номером  $b = c - a$ .

Однако в множестве натуральных чисел операция вычитания не всегда выполнима, и поэтому способ не годится. Но его можно модифицировать: положим  $a \cdot b$  равным «пиквикской сумме» двух чисел, которая вычисляется обычным способом, но *без переноса разрядов*: если сумма в каком-то разряде больше 9, то лишняя десятка просто отбрасывается. Например,  $3756 \cdot 817 = 3563$  (в двух разрядах отброшена «лишняя» десятка). Теперь легко доказать, что если поставить на месте  $(a, b)$  число  $a \cdot b + 1$ , то условие будет выполнено.

*Другой способ.* В первой строке расставим числа по порядку: 1234..., а далее действуем по правилу: если  $k$ -я строка уже заполнена, то в  $(k + 1)$ -й на очередное место ставим наименьшее число, которое можно поставить не нарушая правил (т. е. наименьшее из тех, которых еще нет ни в предыдущих строках на этом месте, ни в этой строке на предыдущих местах). При этом получится

вот что: вторая строка: 214365..., третья — 34127856..., четвертая — 43218765..., пятая — 56781234... и т. д.

**Замечание.** Если бы в первом способе записывали числа не в десятичной, а в двоичной системе, то он совпал бы со вторым.

**29. Решение.** Легко видеть, что количество букв  $A$  и количество букв  $B$  в  $K$ -м слове равно двум последовательным членам ряда Фибоначчи (например, в 6-м слове 3 буквы  $A$  и 5 букв  $B$ ). Отсюда немедленно следует, что если бы в каком-то из слов и число букв  $A$ , и число букв  $B$  делилось на некоторое число  $m > 1$ , то и в каждом слове (как после него, так и до него) число букв обоих типов делилось бы на  $m$ . Поскольку для первого и второго слова это не так (число букв  $A$ , соответственно  $B$ , равно 1), то это невозможно ни для какого другого слова. Отсюда следует отрицательный ответ на вопрос задачи.

**30. Решение.** Эту задачу проще всего решать в косоугольных координатах. А именно, выберем одну из вершин трапеции за начало координат, направим оси вдоль основания и боковой стороны, тогда координаты четырех вершин будут  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  и  $(1, a)$ . Прямая должна пересекать боковые стороны на высоте  $1/5$  и  $4/5$ , что позволяет легко написать ее уравнение.

**Ответ.** 1 : 2.

**32. Решение.** Пусть нет коэффициентов, которые меньше  $-1$ . Обозначим через  $S$  сумму положительных коэффициентов, тогда утверждение  $P(1) = 0$  равносильно тому, что число отрицательных коэффициентов равно  $S$ .

Возьмем теперь двухчашечные весы, и разложим на них гири веса  $2^k$ : на правую чашку — соответственно положительным коэффициентам (поскольку среди них могут быть числа больше 1, там может встретиться несколько гирь одного веса), на левую — соответственно отрицательным (здесь все гири различны). Поскольку  $P(2) = 0$ , весы в равновесии. Теперь требуемое противоречие легко следует из утверждения задачи 26.

**33. Указание.** Двоичная запись номера билета состоит из 5 цифр (от 00001 до 11110). За одну операцию можно узнать одну цифру.

**Ответ.** 5 операций.

**34. Указание.** На каждой стороне куба имеется  $19^2 = 361$  направление, по которому можно вставить иглу. Всего, значит, требуется перекрыть  $3 \cdot 361 = 1083$  направления. Ясно, что один кир-

пич перекрывает только одно направление. Докажите теперь, что если какое-то направление перекрыто, то его перекрывает *четное число кирпичей*. Отсюда уже очевидным образом следует, что 2000 кирпичей не хватит, чтобы перекрыть все направления.

**35. Решение.** а), б) Докажем, что доля букв *A* среди первых  $n$  членов последовательности стремится к  $1/\sqrt{2}$ . Предположим, что среди первых  $n$  членов имеется  $m$  букв *A*, и положим

$$\alpha = m - \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

Проведем теперь операцию, описанную в задаче; при этом возникнет  $n' = n + 2m$  букв, среди которых будет  $m$  букв *B* и, соответственно,  $m' = n + m$  букв *A*. Вычислим заново разность. Имеем:

$$\begin{aligned}\alpha' &= m' - \frac{n'}{\sqrt{2}} = n + m - \frac{n + 2m}{\sqrt{2}} = \\ &= \left(m - \frac{n}{\sqrt{2}}\right) + (n - m\sqrt{2}) = \alpha - \alpha\sqrt{2} = \alpha(1 - \sqrt{2}).\end{aligned}$$

Мы видим, что эта разность переменяла знак, но главное — уменьшилась по модулю; в частности, если вначале было  $|\alpha| < 1$ , то и в дальнейшем постоянно эта величина будет меньше 1.

Отсюда сразу следует, прежде всего, что последовательность непериодична (в периодической последовательности доля букв *A* стремилась бы к рациональному числу). Кроме того, если  $m = 1000$ , то

$$n = \sqrt{2}(m - \alpha) \approx m\sqrt{2} = 1414,2 \dots$$

Это уже почти решение задачи а), хотя в действительности оно неполно: мы не проверили аккуратно, что разность  $\alpha$  меньше единицы для любого числа букв, в частности, для числа 1414. Сделайте это сами. (На самом деле можно доказать, что среди первых  $n$  букв количество букв *A* равно  $[(n+1)/\sqrt{2}]$ , т.е. очередная буква *A* появляется, когда эта дробь «переползает» через очередное целое число.)

**Ответ.** а) На 1414-м месте.



## Х Турнир городов (1988/89)

1. **Ответ.** Доля голубоглазых среди блондинов больше.

2. **Ответ.**  $45^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ .

3. **Указание.** Возьмите три числа, имеющие равный остаток от деления на 3 (принцип Дирихле).

**Замечание.** На самом деле даже из любых пяти чисел можно выбрать такие три числа.

4. **Указание.** Три квадрата при каждой вершине раскрашены в разные цвета.

5. **Указание.** Разность таких двух чисел делится на 9.

**Ответ.** Нет.

6. **Указание.** Все эти окружности получаются из окружности, описанной вокруг  $ABC$ , отражением относительно соответствующей стороны.

7. **Решение.** Припишем каждому ребру свой собственный множитель (лучше всего — простое число, различное для каждого ребра), и поставим в каждой вершине произведение простых чисел, соответствующих выходящим из него ребрам.

8. **Указание.** 22 цвета надо использовать минимальным образом (по одной клетке, и подальше друг от друга). Весь остальной лист закрасить в 23-й цвет.

9. **Указание.** Произведение всех 14 чисел равно четвертой степени произведения чисел в вершинах, и потому положительно. С другой стороны, чтобы их сумма равнялась 0, требуется семь минусов.

*Другой способ решения.* Расставим вначале во всех вершинах единицы (тогда сумма равна 14), и проследим, что произойдет с суммой при замене знака в одной из вершин.

**Ответ.** Нет.

10. **Указание.** Докажите сначала, что точка  $M$  лежит на окружности с центром в  $B$  и радиусом  $AB$ .

**Ответ.**  $90^\circ - 2\alpha$ .

11. **Решение.** Ясно, что число  $N$  получается всегда (для тождественной перестановки:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$  и т.д.). Чтобы получить  $N + 2$ , достаточно взять  $N > 3$ , тогда можно, переставив числа 1,

2, 4 получить слагаемые

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{1} = 5$$

и увеличить сумму на 2. Если  $N > 11$  то можно сделать аналогичную операцию с числами 1, 2, 4 и 3, 6, 12 и получить число  $N + 4$ , и т. д.

Таким образом можно добавить к  $N$  любое четное число (оценки проведите сами).

Для того чтобы добавить к  $N$  единицу, можно воспользоваться, например, четверкой чисел (1, 2, 3, 6) и переставить их так, чтобы получилось:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{1} + \frac{3}{6} + \frac{6}{3} = 5.$$

**12. Решение.** а) Из четырех пар зубьев можно составить 16 пар ( $4 \times 4$ ). В исходном положении совпадают 4 пары, остается, следовательно, 12. Поэтому хотя бы при одном из остальных 13 поворотов одной шестеренки относительно другой не совпадает ни одна пара.

б) Если выпилить зубья с номерами 0, 1, 4, 6, то, как легко проверить, разности этих чисел дают все 13 чисел  $\{0, 1, 2, \dots, 12\} \bmod 13$ . Поэтому при каждом повороте ровно одна пара «выбитых зубов» совпадает.

**Ответ.** а) Да, б) нет.

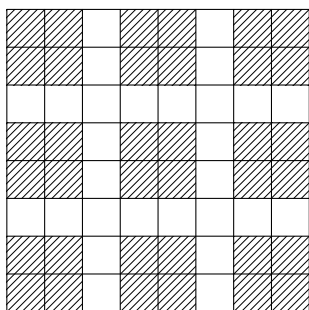
**13. Решение.** Разбиение состоит из  $n - 3$  диагоналей, поэтому для доказательства а) достаточно привести пример двух разбиений, не имеющих ни одной общей диагонали.

Назовем «А-ежом» разбиение, которое состоит в том, что все диагонали выпущены из одной вершины  $A$  во все остальные (кроме, естественно, двух смежных с ней). Рассмотрим две соседние вершины  $A$  и  $B$ ; тогда «А-еж» и «В-еж» не имеют ни одной общей диагонали.

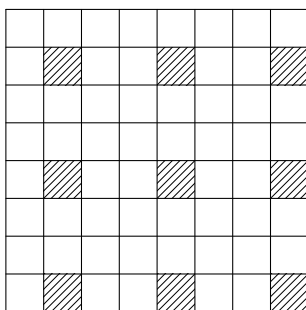
С другой стороны, легко видеть, что любое разбиение  $T$  может быть преобразовано в «А-ежа» за  $n - 3$  шага; отсюда следует, что любое разбиение  $n$  переводится в любое  $S$  за  $2n - 6$  шагов. Для того чтобы усилить оценку, нужно выбрать вершину  $A$  так, чтобы из нее выходила по крайней мере одна диагональ  $T$  (пункт б)), и, более того, по крайней мере 4 диагонали  $T$ ,  $S$  (пункт в)).

**15. Решение.** Каждая клетка доски является соседней для не более четырех из 36 закрашенных на рисунке а). Следовательно,

отметить придется не менее  $36/4 = 9$  клеток. На рисунке б) отмечены ровно 9 клеток, удовлетворяющих 1) и 2).



а)



б)

**16. Решение.** Подставив  $r = -p - q$ , имеем:

$$\begin{aligned} a^2pq + b^2qr + c^2rp &= a^2pq - b^2q(p+q) - c^2p(p+q) = \\ &= (a^2 - b^2 - c^2)pq - b^2q^2 - c^2p^2 = -(b^2q^2 + c^2p^2 - 2bcpq \cos \alpha) = -d^2, \end{aligned}$$

где  $\alpha$  — соответствующий угол в треугольнике со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , а  $d$  — длина третьей стороны в треугольнике, построенном по двум сторонам  $|bq|$ ,  $|cp|$  и углу между ними, равному  $\alpha$  или  $\pi - \alpha$ , в зависимости от знаков  $p$  и  $q$ .

**17. Указание.** Докажите сначала, что если все числа уже выписаны и мы читаем их слева направо, то каждое очередное число либо больше всех предыдущих, либо меньше всех предыдущих. Отсюда сразу следует, что на последнем месте записана либо единица, либо  $N$ , а далее — по индукции.

**Ответ.**  $2^{N-1}$ .

**18. Решение.** Заметим, что число дорог более чем вдвое превосходит число городов; назовем это свойством  $(M)$ .

Допустим, что из какого-то города выходит менее трех дорог; сотрем с карты этот город и эти дороги. При этом  $(M)$  не нарушится. Если после этого еще есть (или появились) города, из которых исходит не более двух дорог, опять сотрем их, и т.д. В какой-то момент этот процесс оборвется, причем поскольку  $(M)$  сохранится, стерты будут не все дороги, а потому и не все города.

Осталось решить поставленную задачу в том предположении, что в стране не более 1998 городов и из каждого города исходит не менее трех дорог.

Начнем с любого города  $A$ , которому мы присвоим нулевой номер. Городам, в которые ведут дороги из  $A$  (их не менее трех) присвоим номер 1. Городам, в которые ведут дороги из этих городов, присвоим номер 2; их шесть (если бы их было меньше, оказалось бы, что из двух городов ведут дороги в один и тот же, и мы бы получили кольцевой маршрут длины 4). На следующем шаге мы получим 12 городов, и так далее. Поскольку число новых городов все время удваивается, не позднее чем на 10 шаге какие-то два города совпадут, т.е. в какой-то город можно попасть из  $A$  двумя разными путями, и каждый из них длины не более 10. Отсюда следует, что существует замкнутый путь длины не более 20.

**19. Решение.** Да, существует. Например, число  $M = 99 \dots 9$  (много девяток). Вполне достаточно, к примеру, взять 300 девяток.

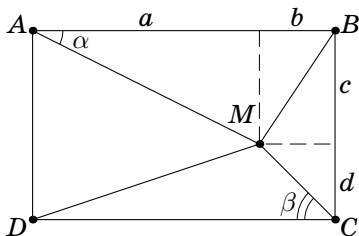
**20. Решение.** Спроектируем точку  $M$  на стороны прямоугольника; пусть эти точки делят  $AB$  на отрезки длины  $a, b$ , а  $BC$  — на отрезки длины  $c, d$ . Таким образом,

$$S = (a + b)(c + d) = (ad + bc) + (ac + bd).$$

Докажем, что первое слагаемое не превосходит  $AM \cdot CM$ . В самом деле, пусть  $\angle MAB = \alpha$ ,  $\angle MCD = \beta$ . Имеем:

$$\begin{aligned} ad + bc &= AM \cos \alpha \cdot CM \sin \beta + AM \sin \alpha \cdot CM \cos \beta = \\ &= AM \cdot CM \cdot \sin(\alpha + \beta) \leq AM \cdot CM, \end{aligned}$$

что и требовалось. Для второго слагаемого рассуждение аналогично.



**Замечание.** Равенство достигается, если  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Привлекая дополнительно соображения симметрии, мы легко убеждаемся в том, что также и  $\angle MDC + \angle MBA = 90^\circ$ . Отсюда следует, что для каждого прямоугольника существует две точки, в которых наше неравенство обращается в равенство, и они лежат на пересечении полуокружности, построенной на большей стороне прямоугольника как на диаметре, со средней линией прямоугольника. Для квадрата эти две точки сливаются в одну — центр квадрата.

**21.** См. решение задачи 25.

**22. Решение.** Площади треугольников  $ABM$  и  $ACM$  равны. Между тем площадь треугольника есть произведение радиуса вписанной окружности на полупериметр; таким образом, если один радиус вдвое больше другого, то один периметр должен быть вдвое меньше другого. Это быстро приводит к противоречию.

**Ответ.** Нет, не может.

**23. Решение.** Число 111 111 делится на 7. Отсюда легко вывести, что можно спереди отбросить 48 восьмерок, а сзади — 48 девяток. Остается число  $88 * 99$ . Отбросим 84 спереди и 49 сзади; останется число  $4 * 50$ , для которого уже легко проверить, что  $*$  = 5.

**24. Указание.** На каждой грани можно построить путь, обходящий все 9 клеточек грани и при этом начинающийся в любом заданном угле и кончающийся в другом, тоже любом заданном угле.

**Ответ.** Да, это возможно.

**25. Решение.** Запишем неравенства:

$$1 \leq (a + b + c + d)^2 = \\ = a^2 + (2ab + b^2) + (2ac + 2bc + c^2) + (2ad + 2bd + 2cd + d^2).$$

Заменяя удвоенные произведения на квадраты (которые больше), получаем нужное неравенство.

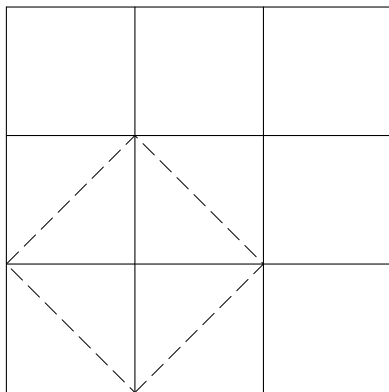
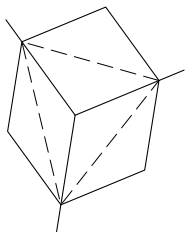
Задача 21 решается аналогично, только неравенства пишутся в обратную сторону.

**26. Указание.** Пусть  $AB$  и  $CD$  — боковые стороны, согласно условию,  $AB + CD = AD + BC$ . Поэтому сумма радиусов окружностей равна полусумме оснований, и средняя линия трапеций как раз есть объединение (в теоретико-множественном смысле) этих радиусов.

**27. Решение.** Задача имеет много решений. Простейшее: взять для начала числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, а затем умножить их все на общее кратное 15 сумм  $1 + 2$ ,  $1 + 3$ , ...,  $5 + 6$ .

**28. Решение.** Нет. В самом деле, на кубике 54 клеточки и 56 углов, следовательно, через какие-то два угла диагонали не будут проходить. Возьмем один из этих углов. Если он стоит в вершине, то придется взять три диагонали, обходящие эту вершину, и они образуют замкнутый путь (см. рисунок), что противоречит

требованию. Если он не в вершине, то аналогичным образом 4 диагонали, обходящие эту вершину, образуют замкнутый путь.



**29. Решение.** За два прыжка Коля может спуститься, самое большое, на две ступеньки, и только в том случае, если он все время прыгает вниз на 8 и вверх на 6. Но так прыгать можно только  $3 + 3$  раза, после этого придется менять тактику (иначе придется вновь ступить на пройденную ступеньку). Таким образом, за 8 прыжков Коля может спуститься, самое большое, на 7 ступенек; за 72 прыжка — на 63 ступеньки, причем он не спускался ниже 71-й ступеньки. Но в таком случае он, по принципу Дирихле, дважды побывал на одной ступеньке.

**Ответ.** Нет, не сможет.

**30. Решение.** Первый выиграет, если будет на каждом ходу ставить фишку на поле, симметричное тому, на котором она стоит в данный момент, относительно центра. Убедитесь сами, что такая тактика всегда проходит.

**31. Указание. а)** Рассмотрите два случая.

1) Все четыре перегнутых треугольника сходятся в одной точке (тогда надо доказывать, что имеет место вторая альтернатива).

2) Это не так, и две перегнутые стороны граничат по целому отрезку (тогда эти стороны до перегибания были параллельны).

б) Укажем точки на сторонах параллелограмма, которые нужно принять за вершины  $PQRS$ . Если  $a$  — длина короткой стороны параллелограмма,  $b$  — длинной ( $a \leq b$ ), то в качестве  $P, R$  нужно взять середины двух коротких его сторон, а на длинных выбрать



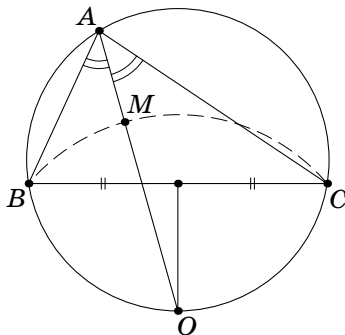
**35. Указание.** Пусть  $A, B$  — искомые числа. Разделив  $AB$  на  $A$ , мы получим число  $1\,000\,000 + B/A$  (отсюда ясно, что  $B$  делится на  $A$ ). Это число имеет вид  $\overline{1\,000\,00z}$  (последняя цифра неизвестна), причем оно должно делиться на шестизначное  $B$ . Частное не может быть больше 9. Остается несложный перебор.

**Ответ.** (Единственный.) 166 667 и 333 334.

**36. Решение.** Найдем сначала точку  $O$ . Она лежит вне треугольника  $ABC$  на серединном перпендикуляре к  $BC$ , причем

$$\angle BOC = 360^\circ - 2\angle BMC = \angle B + \angle C.$$

Отсюда следует, что  $O$  лежит на окружности, описанной вокруг треугольника  $ABC$ ; поскольку  $OB = OC$ , то следовательно,  $AO$  — биссектриса угла  $A$ .



Точка  $M$  лежит на пересечении  $AO$  и дуги  $L$ , описанной из  $O$  радиусом  $OB$ , т. е. ее положение определено однозначно. Остается заметить, что если  $Q$  — центр вписанной в  $ABC$  окружности, то  $Q$  также лежит на биссектрисе и

$$\angle BQC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C = \angle BMC.$$

Отсюда следует, что  $Q = M$ .

**37. Указание.** За 3 шага можно вычислить коэффициенты композиции двух функций:

$$f_k \cdot (f_{k+1}(x)) = p_k f_{k+1}(x) + q_k = p_k p_{k+1} x + p_k q_{k+1} + q_k$$

(достаточно даже двух шагов, если считать, что число  $p_k$  можно использовать сразу в двух операциях). Далее надо воспользоваться тем, что  $2^{10} = 1024 > 1000$ .



**38. Решение.** Количество членов ячейки после каждого собрания меняется с четного на нечетное или наоборот. Поэтому реализовать все варианты можно было бы, только если число четных и нечетных вариантов различалось не более чем на 1. Однако на самом деле четных вариантов больше на 45 (почему?).

**Ответ.** Нет.

**39. Решение.** Укажем такую расстановку. Поставим в каждой области, конечной или бесконечной, число, равное числу вершин этой области. Затем расставим знаки чередующимся образом (так, чтобы минус и плюс всегда стояли в соседних областях).

Очевидно, первое условие выполнено (число вершин не превосходит  $N$ ). Для того чтобы убедиться в выполнении второго условия, заметим, что каждая вершина «участвует» в 4 членах, соответствующих 4 многоугольникам, сходящимся в ней, и дает в каждый из них прибавку  $(+1)$  или  $(-1)$ . По одну сторону от данной рассматриваемой прямой лежат либо 2, либо 4 из этих многоугольников.

**Замечание.** Легко видеть, что для трех прямых, пересекающихся в одной точке, предложенная конструкция не годится, так что условие о том, что прямые не пересекаются по три в точке, существенно — по крайней мере, для предложенного решения.

**40. Решение.** Будем говорить, что набор прямоугольников упорядочен, если их можно перенумеровать таким образом, что каждый следующий входит в предыдущий. Достаточно разбить множество всех прямоугольников на 50 упорядоченных подмножеств. Тогда и данное нам множество из 101 элемента будет разбито на соответствующие подмножества, и в одном из них, по принципу Дирихле, будет не менее 3 элементов, а это и требуется.

Укажем одно из таких подмножеств. Пусть  $(a, b)$  — стороны прямоугольника, причем  $a \geq b$ . Множество  $U(80)$  содержит многоугольник, если он имеет один из следующих типов:  $(80, 80)$ ;  $(80, 79)$ ;  $(80, 78)$ , ...,  $(80, 21)$ ,  $(79, 21)$ , ...,  $(22, 21)$ ,  $(21, 21)$ . Очевидно,  $U(80)$  упорядочено.

Другие 49 множеств устроены аналогично, только числа 80 и 21 надо заменить на  $(k, 101 - k)$ ,  $k = 100, 99, \dots, 51$ . Последнее из них, таким образом, содержит только три элемента:  $(51, 51)$ ;  $(51, 50)$ ;  $(50, 50)$ .

## XI Турнир городов (1989/90)

1. Ответ.  $Y, X, Z$ .

**Замечание.** Информация о том, сколько раз менялся местами  $Z$ , является лишней, задача решается без этого. В самом деле,  $X$  финишировал четным, следовательно, вторым.

2. **Решение.** Высота разбивает данный треугольник на два прямоугольных. Пусть  $a, a+1, a+2$  — стороны данного треугольника,  $h$  — длина высоты,  $r$  — отрезок, прилегающий к стороне длины  $a+2$ . Решая два прямоугольных треугольника, получаем:  $(a+2)^2 - h^2 = r^2$  и  $a^2 - h^2 = (a+1-r)^2$ . Вычитая и приводя подобные члены, получаем  $4 = 2r - a - 1$ , что и требовалось.

3. **Указание.** Удесятеренная сумма всех чисел равна

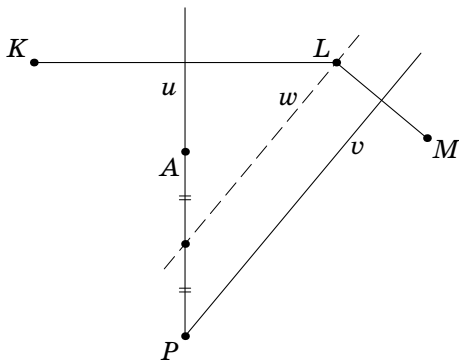
$$(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) + (x_2 + x_3 + \dots + x_{11}) + \dots + (x_{1989} + x_1 + \dots + x_9).$$

4. **Указание.** Представление дроби в виде цепной — единственно.

Ответ.  $x = 1, y = 2, z = 3$ .

5. **Указание.** Послано более половины от максимально возможного числа открыток.

6. **Решение.** Вершины  $A, B$  четырехугольника лежат на серединных перпендикулярах к отрезкам  $KL$  и  $LM$ . Обозначим их  $u, v$ , и пусть  $P$  — точка их пересечения. Проведем через точку  $L$  прямую  $w$  параллельно  $v$ ; так как  $L$  лежит на середине стороны, то точка пересечения  $w$  и  $u$  лежит на середине отрезка  $AP$ . Это позволяет построить вершину  $A$ . Дальнейшее элементарно.



**7. Решение.** Да, существуют. Например, можно взять числа так, чтобы каждое из них имело вид  $N^2 + 1$ , причем числа  $N$  очень быстро возрастали.

Другой пример: числа 10, 1000, 100 000, ...,  $10^{2k+1}$ .

**8. Ответ.** 1990.

**9. Решение.** Если  $x \geq 220$ , то  $x/10 \geq 2 + x/11$ , поэтому и целые части чисел  $x/10$  и  $x/11$  отличаются по меньшей мере на 2. Остается рассмотреть в качестве возможных решений числа от 0 до 219. Тут помогает простое соображение: если  $[x/10] = [x/11] + a$ , то  $[(x + 110)/10] = [(x + 110)/11] + a + 1$ . Отсюда следует, что решениями является ровно половина этих чисел (почему?), т.е. уравнение имеет 110 решений.

**10. Указание.** Если отразить треугольники  $BCD$ ,  $DEF$ ,  $FAB$  относительно сторон  $BD$ ,  $DF$  и  $FB$  соответственно, то образы сторон  $AB$  и  $BC$ ,  $CD$  и  $ED$ ,  $EF$  и  $FA$ , а соответственно и образы точек  $A$ ,  $C$ ,  $E$ , совпадут.

**11. Решение.** Нет. Наиболее изящное рассуждение таково. Пусть  $ABCD$  — квадрат, образованный какими-то четырьмя вершинами; построим на  $AB$  равносторонний треугольник  $ABE$  так, чтобы вершина  $E$  лежала внутри квадрата. Поскольку точка  $E$  получена из  $B$  поворотом на  $60^\circ$  вокруг  $A$ , она тоже является вершиной. Аналогично построим вовнутрь квадрата треугольники  $BCF$ ,  $CDG$  и  $DAH$ ; очевидно, точки  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  образуют квадрат, который меньше, чем квадрат  $ABCD$ . Теперь повторим эту конструкцию еще раз; мы получим еще один квадрат с вершинами в точках сетки, который еще меньше, и т.д. В то же время ясно, что размер квадрата не может быть меньше, чем сторона треугольника. Противоречие.

**12. Решение.** а) Достаточно предъявить такие тройки в достаточном количестве. Можно, например, взять тройки

$$(1, 2, N - 3); \quad (3, 4, N - 7); \quad (5, 6, N - 11); \quad \dots$$

б) Пусть задан набор троек

$$(a_1, b_1, c_1), \quad (a_2, b_2, c_2), \quad \dots, \quad (a_r, b_r, c_r),$$

и пусть  $S$  — сумма всех чисел этих троек, тогда

$$S \geq 1 + 2 + \dots + 3r = \frac{3r(3r+1)}{2}.$$

С другой стороны,

$$S = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) + \dots + (a_r + b_r + c_r) = N \cdot r,$$

откуда  $3 \cdot (3r + 1) \leq 2N$ .

**13. Указание.** а) Достаточно доказать, что

1) все клетки вдоль бортиков заняты и

2) в любом квадратице  $2 \times 2$  не более одной свободной клетки.

б) Докажите сначала, что в прямоугольнике размером  $2 \times 5$  не может быть более 2 пустых клеток (нужно рассмотреть разные варианты их расположения).

**14. Указание.** Сначала нужно доказать, что стороны любого из параллелограммов параллельны сторонам шестиугольника. Таким образом, множество параллелограммов делится на три подмножества, в зависимости от того, каким сторонам они параллельны. Далее нужно вычислить суммарную площадь всех параллелограммов, одна из сторон которых параллельна стороне  $AB$ , и убедиться в том, что она равна  $AB \cdot BD$ , или  $2/3$  от площади шестиугольника. Таким образом, суммарная площадь остальных составляет одну треть. Дальнейшее очевидно.

**15. Решение.** Как ни странно, ответ положительный. Если разместить тетраэдр так, чтобы два его скрещающихся ребра были параллельны выбранной плоскости (координаты вершин:  $(0, d, r)$ ,  $(0, -d, r)$ ,  $(d, 0, -r)$  и  $(-d, 0, -r)$ ), то при правильном выборе параметров  $r$  и  $d$  (объем тетраэдра равен объему шара, расстояние между этими ребрами — диаметру) условие будет выполнено. Причина здесь в том, что при движении плоскости вниз от точки соприкосновения — то ли с шаром, то ли с тетраэдром — площадь фигуры пересечения растет по одному и тому же закону.

**16. Решение.** Обозначим сумму из условия задачи через  $S_N$ . Для  $N = 2$  и  $N = 3$  утверждение проверяется непосредственно. Теперь для произвольного  $N$  выделим отдельно набор, состоящий из одного числа  $\{N\}$ , а все остальные наборы разобьем на два типа: те, в которые  $N$  не входит (т.е. входят числа от 1 до  $N - 1$ ), и те, в которые  $N$  входит (и следовательно, остальные числа не превосходят  $N - 2$ ). Таким образом, справедлива рекуррентная формула:

$$S_N = N^2 + S_{N-1} + N^2 S_{N-2}.$$

Отсюда нужное соотношение получается по индукции.

**17. Указание.** Докажите, что площадь креста не меняется при сдвиге точки  $A$ .

**Ответ.**  $2\gamma R^2$ .

**18. Указание.** а) Если число прогрессий конечно, то рассмотрим общее кратное их разностей  $N$ . Тогда легко видеть, что среди первых  $N$  чисел в прогрессии вошло не более

$$\frac{N}{d_1} + \frac{N}{d_2} + \frac{N}{d_3} + \dots < 0,9N$$

чисел, т. е. не все.

б) Можно, например, взять прогрессии с разностями 2, 8, 32, 128, ...,  $2^{2n+1}$ , начинающиеся с чисел 1, 2, 4, 6, ... (в качестве первого члена каждый раз берем наименьшее число, не вошедшее в предыдущие прогрессии).

**Ответ.** а) Нет, б) да.

**19. Указание.** Зафиксируем три произвольные точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и введем косоугольную систему координат, считая  $A$  началом координат, а направления  $AB$  и  $AC$  — осями.

Установим за 1 вопрос площадь треугольника  $ABC$ . Теперь за 3 вопроса можно для любой точки  $X$  найти ее барицентрические координаты относительно  $ABC$ , а это, в свою очередь, позволяет определить ее косоугольные координаты.

**20. Решение.** Запишем в каждой клетке, где стоит звездочка, число  $1/k$ , где  $k$  — число звездочек в данном столбце (считая и данную звездочку). Сумма чисел в столбце равна 1, так что сумма всех записанных чисел равна  $n$ .

Теперь сотрем их и запишем в каждой клетке, где стоит звездочка, число  $1/r$ , где  $r$  — число звездочек в данной строке. Сумма всех записанных чисел не превосходит  $m$  (возможно, меньше, если некоторые строки пусты). Таким образом, вторая сумма меньше первой, а это означает, что по крайней мере в одной клетке в первый раз было записано большее число, чем во второй.

**21. Решение.** При  $n = 1$  (основание индукции) утверждение очевидно, и достаточно доказать, что при переходе от  $n$  к  $n + 1$  справа и слева добавляется одно и то же число.

Добавка справа равна  $2 - 1/(n + 1)$ .

Слева появляется один новый член  $1/(n + 1)^2$ , и в каждый член добавляется еще одно слагаемое  $1/(n + 1)$ ; таким образом, после раскрытия скобок появляется  $n + 1$  членов вида  $1/(n + 1)^2$ , сумма которых, следовательно, равна  $1/(n + 1)$ , а также члены

вида

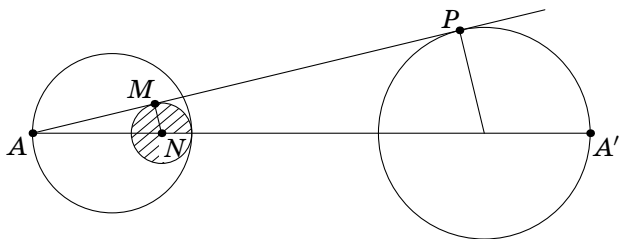
$$2 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Как нетрудно видеть, количество слагаемых второго вида равно  $k$  (для каждого  $k$ ), и суммируя их вначале для каждого  $k$  в отдельности, получаем еще  $n$  слагаемых вида  $2/(n+1)$ . Дальнейшее очевидно.

**22. Решение.** Пусть  $O$  и  $O'$  — центры двух данных окружностей,  $N$  — центр круга  $K$ ,  $R$ ,  $R'$  и  $r$  — их радиусы. Точка  $N$  лежит на отрезке  $AA'$ , и  $AN = 2R - r$ . Опустим из точек  $N$  и  $O'$  перпендикуляры  $NM$ ,  $O'P$  на один из лучей, выпущенных из  $A$ . Из подобия треугольников  $ANM$  и  $AO'P$  следует, что

$$\frac{r}{2R-r} = \frac{R'}{AA'-R'},$$

откуда следует, что  $r = 2R \cdot R' / AA'$ . Из соображений симметрии радиус круга  $K'$  таков же.



**23. Ответ.** Можно.

**25. Решение.** Пусть  $AC = b < c = AB$ . Построим треугольник такой  $ACD$ , что

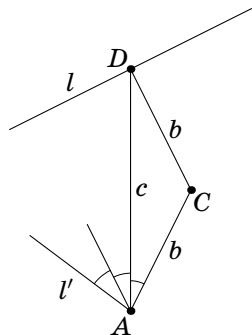
$$AC = CD = b, \quad AD = c.$$

Проведем из  $D$  прямую  $l$  перпендикулярно  $CD$  и из  $A$  прямую  $l'$  так, чтобы угол между  $AD$  и  $l'$  был вдвое больше угла  $DAC$ . Пусть  $B$  — точка пересечения этих прямых. Треугольник  $ABC$  — искомым.

**26. Решение.** а) Для числа  $n = 4k + 1$  подходят, например, числа

$$1, 1, \dots, 1, 3, 2k+1.$$

б) Если  $n$  четно, то сумма  $S$  будет четной, а произведение  $P$  нечетным.



Если же  $n = 4k + 3$ , то надо по отдельности рассмотреть два случая.

1) Выбрано четное число чисел вида  $4s + 3$  (остальные — вида  $4s + 1$ ). Тогда  $P$  имеет вид  $4r + 1$ , а  $S$  — вид  $4m + 3$ .

2) Их выбрано нечетное число. Тогда, наоборот,  $P$  имеет вид  $4r + 3$ , а  $S$  — вид  $4m + 1$ .

**27. Ответ.** а) 4 точки; б) 6 точек.

**Решение.** Очевидно, что выгоднее всего брать вершины, примеры строятся легко.

Для додекаэдра каждая вершина может «обслужить» не более 3 из 12 граней, и потому очевидно, что 4 — это минимум.

Для икосаэдра столь грубая оценка не проходит (по грубой оценке, можно было бы обойтись 4 точками). Будем рассуждать так. 12 вершин икосаэдра разбиваются на 6 пар противоположных. Если из каждой пары взято хотя бы по одной, то вот уже 6 точек. Допустим теперь, что в паре  $(A, B)$  противоположных вершин не взято ни одной. Тогда требуется не менее 3 вершин, чтобы «обслужить» 5 граней, прилегающих к  $A$ , и еще 3 — для граней вокруг  $B$ . Так или иначе, получается 6.

**28. Решение.** Решение в обоих случаях одинаково, и оно годится, если число монет равно  $6k + 1$ , как в задаче (а также при числе монет  $6k$ ). Отложим в сторону одну монету, а оставшиеся разделим на 3 кучки по  $2k$  в каждой. Очевидно, две из этих кучек будут иметь одинаковый вес, и за два взвешивания можно определить, какие именно (и будет ли третья легче или тяжелее). Третьим взвешиванием мы делим одну из кучек равного веса пополам и взвешиваем. Мы утверждаем, что такие 3 взвешивания дают ответ на вопрос. (К примеру: если третья кучка тяжелее первой и второй, а третье взвешивание дало результат «веса равны», то фальшивые монеты тяжелее; если же третье взвешивание дало результат «веса не равны», то фальшивые монеты легче.)

**29. Указание.** Пересечение двух графиков соответствует решению квадратного или линейного уравнения, так что они могут пересечься не более чем в 2 точках. Поэтому если  $n$  графиков разбили плоскость на  $N$  частей, то точки пересечения разбивают  $(n + 1)$ -й график не более чем на  $2n + 1$  частей. Соответственно число новых частей не превосходит  $N + 2n + 1$ . Отсюда по индукции легко доказывается, что  $N = n^2 + 1$ .

Остается еще проверить, что можно подобрать 100 квадратных трехчленов так, чтобы их разность всегда также была трехчленом,

имеющим 2 корня, и чтобы корни не совпадали. Для второго достаточно взять числа «общего положения», а чтобы гарантировать существование корней, можно взять у всех трехчленов  $a_n$  и  $c_n$  небольшими, а  $b_n$  — большими, и притом разными для разных трехчленов (например,  $b_n = 1000 + n^4$ ).

**Ответ.** 10 001.

**30. Решение.** Площади двух четырехугольников отличаются на 8 треугольников: 4 «потерянных», которые были в старом четырехугольнике и которых нет в новом, и 4 «добавленных».

Хотелось бы установить соответствие между потерянными и добавленными треугольниками, при котором они были бы попарно равны, но это невозможно, их площади не равны попарно. Однако если разбить каждый из 4 «потерянных» треугольников, на два диагоналями исходного четырехугольника, то каждый из этих 8 треугольников подобен одному из «добавленных» (это следует из параллельности этих диагоналей сторонам нового четырехугольника), и коэффициенты подобия без труда вычисляются (они равны  $1 : \sqrt{2}$ ). Дальнейшее очевидно.

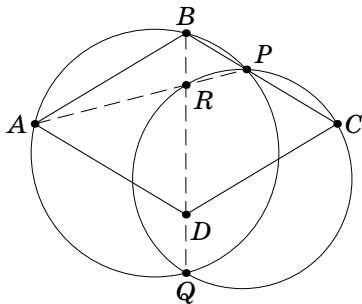
**31. Решение.** Допустим, что вес первого справа слона равен (в килограммах)  $5000 + x$  и  $x \neq 0$ , тогда вес его соседа равен  $5000 - 2x$ , следующих —  $5000 + 4x$ ,  $5000 - 8x$  и т. д. Веса двух последних составят соответственно  $5000 - 8192x$  и  $5000 + 16384x$  (13-я и 14-я степени двойки). Поскольку  $x$  целое, одно из этих чисел будет отрицательным.

**Ответ.** 5 тонн.

**32. Решение.** Из теоремы о вписанных углах следует, что

$$\angle BAP = \angle BQP = \angle RQP = \angle RCP = \angle RCB,$$

а так как  $BD$  — ось симметрии ромба, то  $\angle RCB = \angle BAR$ . Следовательно, точки  $A$ ,  $R$  и  $P$  лежат на одной прямой.





**33. Указание.** Основная лемма. Для каждого  $r > 1$  существует ровно одна пара  $(m, n)$ , удовлетворяющая нашим неравенствам и такая, что  $m + n = r$ .

Остается выяснить, для каких  $r$  оба этих числа будут не больше 1000.

**Ответ.** 1706, что приближенно равно  $1000(1 + 1/\sqrt{2})$ .

**34. Указание.** Правильный набор должен соответствовать разложению на множители числа 201, а оно раскладывается только на 2 множителя:  $201 = 3 \cdot 67$ . В задаче 36 ответ аналогичен, но число 67 надо заменить на 167.

**Ответ.** б) Два набора, а именно:

1) 1, 1 и 67 гирь по 3 грамма;

2) 66 гирь по 1 г и 2 — по 67 г.

**35. Решение.** При  $n = 1$  годится многочлен  $P(x) = x - 1$ . Пусть для  $n = k$  построен нужный многочлен степени не выше  $2^k$ . Умножив его на  $x^{2^k} - 1$ , мы получим подходящий многочлен для  $n = k + 1$ .

**37. Указание.** Постройте граф с  $p + q$  вершинами (это — гости первого и второго вариантов), и два гостя  $A, B$  соединены ребром тогда и только тогда, когда  $A$  — гость из первого «набора»,  $B$  — из второго и есть кусочек нарезанного пирога, который при первом дележе достается  $A$ , а при втором —  $B$ . Докажите, что этот граф связан.

**Ответ.**  $p + q - 1$  кусок.

**Замечание.** Если  $p$  и  $q$  не взаимно просты и  $\text{НОД}(p, q) = r$ , то ответ:  $p + q - r$ .

**38. Указание.** Пусть  $R$  — точка пересечения прямых  $CD$  и  $PQ$  (см. рисунок). Докажите, что  $CR$  и  $CH$  — биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине  $C$  треугольника  $QCP$ , учитывая, что  $\frac{QH}{PH} = \frac{QR}{PR}$  (равенство следует из подобия треугольников). Не забудьте рассмотреть разные случаи расположения точек  $P, Q$  и  $R$ .

**39. Ответ.** Существует в обоих случаях.

**Решение.** Один из способов: взять два икосаэдра, вынуть из каждого по одной грани (расположив их параллельно) и соединить икосаэдры «трубой» в виде треугольной призмы. Ее сечение как раз и даст треугольник. Для того чтобы завершить решение пункта а), достаточно деформировать оба икосаэдра так, чтобы многогранник стал выпуклым. Для задачи б) этого недостаточно, поскольку в вершинах призмы сходится по 6 ребер (во всех

остальных вершинах — по 5). Поэтому в случае б) придется еще немного «подправить» икосаэдры, чтобы на сторонах выбрасываемого треугольника сходилось не 5, а 4 ребра.

**40. Решение.** Пусть  $r$  — площадь одной из клякс,  $x, y$  — длины ее проекций на стороны квадрата. Используя первую часть условия ( $r \leq 1$ ), мы видим, что справедливо неравенство

$$r \leq \sqrt{r} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Осталось использовать вторую часть условия, из которой легко следует, что  $\sum x \leq a$ ,  $\sum y \leq a$ , и следовательно,  $\sum r \leq a$ .

## ХII Турнир городов (1990/1991)

1. **Указание.**  $a + b < ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ .

2. **Указание.** Если повернуть треугольник на  $120^\circ$  вокруг центра шестиугольника, его вершины вновь попадут на те же три стороны шестиугольника, а стороны нового треугольника будут параллельны сторонам прежнего.

3. **Решение.** Разделим все числа на их сумму. Тогда задача сведется к равносильной: «Представить единицу в виде суммы нескольких различных дробей вида  $1/n$ ».

Простейшее (но не самое экономное) решение этой задачи: начнем с дроби  $1/2$ , а далее будем действовать по принципу: если до единицы недостает  $1/k$ , то берем дробь  $1/(k+1)$ . Таким образом, на первом шаге до единицы недостает  $1/2$ , и следующие дроби будут:  $1/3$  (итого  $5/6$ , недостает  $1/6$ );  $1/7$  (недостает  $1/42$ ),  $1/43$  и т. д. На каждом шаге недостача будет иметь вид  $1/r$ , и на последнем шаге возьмем недостающую дробь полностью.

*Другое решение.*

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \frac{1}{240},$$

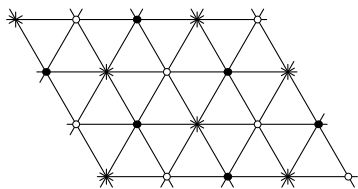
соответственно  $240 = 60 + 48 + 40 + 30 + 24 + 20 + 12 + 3 + 2 + 1$ .

4. **Указание.** Если раскрасить доску по-шахматному, то каждый треугольник покрывает половину белой и половину черной клетки.

**Ответ.** Нет.

5. **Указание.** Кратчайший путь между клетками, где стоят числа 1 и  $n^2$ , имеет длину не более  $n - 1$ .

6. **Решение.** Все вершины можно разделить на три множества  $A \cup B \cup C$ , которые идут через две на третью в каждой из строк (каждое из них образует также равносторонние треугольники, но со стороной  $\sqrt{3}$ ). Легко доказать, что при повороте вокруг любой



вершины каждое из множеств  $A$ ,  $B$ ,  $C$  инвариантно. Смежные вершины принадлежат разным множествам.

**Ответ.** Нет.

**7. Указание.** Пусть  $A$  — конец часовой стрелки первых часов,  $C$  — вторых. Добавим на первом циферблате еще одну часовую стрелку, показывающую местное время, и пусть  $B$  — ее конец. Тогда при любом положении стрелок  $CB$  равно расстоянию между центрами (и постоянно),  $AB$  тоже постоянно (это хорда окружности, соответствующая разности между местным и московским временем). Таким образом, в треугольнике  $ABC$  со временем меняется только третья сторона, и нам известно ее максимальное и минимальное значение. Очевидно, что эти значения соответствуют вырожденным треугольникам, для которых угол  $B$  равен  $0$  и  $\pi$  соответственно. (Если считать, что часы висят на стене на одинаковом уровне, значения  $m$  и  $M$  достигаются, когда стрелки  $A$  и  $C$  занимают симметричное положение относительно 12 часов.)

**Ответ.**  $(M + m)/2$ .

**8. Решение.** «Раскрасим» наш параллелепипед в черно-белый цвет, т.е. объявим соседние кубики — один белым, другой черным. Очевидно, всего кубиков — четное число, так как черных и белых кубиков будет поровну: по  $11 \cdot 6 \cdot 13$ .

Допустим теперь, что параллелепипед сложен из «кирпичей». Поскольку в каждом «кирпиче» либо 3 белых и 1 черный кубик, либо наоборот, получается, что в параллелепипеде тех и других должно быть поровну. С другой стороны, поскольку объем кирпича равен 4, всего их число равно  $11 \cdot 3 \cdot 13$ , т.е. нечетно. Противоречие.

**9. Решение.** Обозначим  $k$ -е по счету знаменатели дробей через  $a_k$  и  $b_k$  соответственно, начиная счет с 2; очевидно,  $a_k > k$ ,  $b_k > k$ . Положим  $\zeta_k = |a_k - b_k|$ . Тогда

$$\zeta_k = \left| \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{b_{k+1}} \right| \leq \frac{\zeta_{k+1}}{a_{k+1}b_{k+1}},$$

и знаменатель последней дроби больше, чем  $(k+1)^2$ . Остальное — по индукции.

**10. Указание.** Этот отрезок пересекает  $\Gamma$  в двух точках, одна из которых —  $C$ , а другая — середина полуокружности (обозначим ее  $Z$ ). Отсюда вытекает ответ.

**Ответ.** Геометрическое место есть дуга  $\Gamma$ , подвергнутая гомотетии с коэффициентом  $1/2$  с центром в точке  $Z$ .

**11. Решение.** Расставим в клетках числа 1, 2, 3 по диагоналям, начиная от угла: на первой, четвертой, седьмой и т.д. диагоналях в каждой клетке пишется 1, на второй, пятой и т.д. — 2, на третьей и т.д. — 3. Очевидно, при любой операции перекрашивается (в тот или иной цвет) ровно одна клетка каждого типа. Вначале четность числа черных клеток каждого типа одна и та же (равна 0), поэтому после любого числа перекрашиваний число черных клеток всех трех типов будет либо четным (у всех трех типов), либо нечетным. Однако число клеток разных типов — 21, 21 и 22, так что нельзя сделать черными все клетки.

**Ответ.** Нет, не удастся.

**12. Указание.** Из данных 4 отрезков нельзя составить две разных трапеции так, как требует условие задачи. Причина в том, что разность оснований трапеции (если она не равна нулю) больше, чем разность боковых сторон.

**13. Решение.** Допустим сначала, что  $x_1 = -a$ ,  $x_2 = -b$ , где  $a, b \geq 0$ . Тогда следующие члены выписываются однозначно:  $x_3 = a + b$ , далее идут  $x_4 = a + 2b$ ,  $x_5 = b$ ,  $x_6 = -a - b$ ,  $x_7 = a$ ,  $x_8 = 2a + b$ ,  $x_9 = a + b$ ,  $x_{10} = -a$ ,  $x_{11} = -b \dots$  — для этого случая утверждение доказано.

Общий случай можно свести к этому. В самом деле, если, например, первый член отрицателен, а второй положителен:  $y_1 = -c$ ,  $y_2 = d$ , то получится та же последовательность, но она будет начинаться не с первого, а либо со второго члена (если  $d > c$ ), либо с 6-го (если  $d \leq c$ ). Случай последовательности, начинающейся с двух положительных членов, дает остальные 6 возможностей (та же последовательность, но начинающаяся с 3-го, ..., 9-го членов) в зависимости от соотношения между начальными членами.

**14. Решение.** а), б) Занумеруем карты. При  $n = 9$  можно поступить так: первым шагом перебросить карты 1 2 3 4 после 5 6 7 8 (получим перестановку 5 6 7 8 1 2 3 4 9), а затем последовательно перебросить в нужные места пару 8 1 (после девятки), затем 7 2 (после восьмерки), затем 6 3 и 5 4.

Очевидно, аналогичный прием позволяет при любом нечетном числе карт  $n$  провести преобразование за  $(n + 1)/2$  операций, тогда как при четном требуется  $(n + 2)/2$  операций. Это дает решение пункта б).

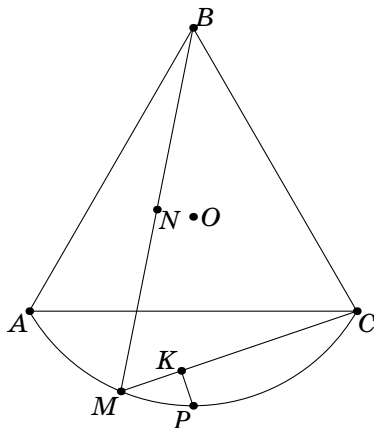
в) Представим себе, что карты лежат в ряд, и каждая карта приклеена бумажкой к предыдущей и к последующей (всего, значит, 51 склеивающая бумажка). Для того чтобы переложить все

карты, нужно разрезать все склейки. За один раз мы разрезаем не более 3 склеек (две — в месте, откуда мы берем карты, и одну — там, куда их кладем); вроде как раз получается 17. Однако очевидно, что в какой-то момент необходимо тронуть либо первую, либо последнюю карту, так что в этот момент мы разрежем не более двух склеек. Поэтому 17 операций не хватит.

г) Уточним предыдущее рассуждение: примем во внимание, что карты не просто «склеены», но идут по порядку, от меньшей к большей. При перекалывании необходимо нарушить порядок в каждой соседней паре. Однако при любом перекалывании удастся нарушить порядок не более, чем двух пар.

В самом деле, пусть группа  $(a \dots b)$  лежала между картами  $c, d$ , а переместилась на позицию между  $e$  и  $f$ . Предположим, что при этом удалось нарушить три порядка. Это означает, что одновременно имели место неравенства  $c < a$ ,  $b < d$ ,  $c > d$ ,  $e < f$ ,  $e > a$ ,  $b > f$  или  $a > c > d > b > f > e > a$ , что невозможно. Итак, обойтись 26 перекалываниями можно только в предположении, что каждый раз (кроме, быть может, одного) происходит два нарушения порядка. Остается опять-таки посмотреть, что происходит при перекалывании в начале и в конце.

**16. Указание.** Докажите, что при повороте на  $60^\circ$  вокруг точки  $A$  треугольник  $BON$  ( $O$  — центр окружности) переходит в треугольник  $CPK$ .



**17. Решение.** Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_k$  — центры данных квадратов, а  $Z$  — центр квадрата, который нужно найти. Согласно

условию, расстояние между любыми двумя точками  $A_i, A_j$  не превышает 2. Требуется найти точку  $Z$ , которая отстоит не больше, чем на 1, от любой из данных точек по горизонтали и не более, чем на 1 — по вертикали.

Рассмотрим максимальную и минимальную абсциссу точек  $A_i$ , и примем их среднее арифметическое за абсциссу  $Z$ ; ординату  $Z$  находим аналогично.

**18. Решение.** Выберем некую координатную ось, произвольный угол  $\vartheta$  и рассмотрим те направленные прямые, которые образуют с координатной осью угол  $\vartheta$  и делят пополам множество красных точек: по 5 с каждой стороны. Такие прямые образуют некую полосу  $A(\vartheta)$ . Аналогично определим полосу  $B(\vartheta)$  из прямых, которые делят пополам множество синих точек.

Остается доказать, что существует  $\vartheta$ , для которого полосы  $A(\vartheta)$  и  $B(\vartheta)$  пересекаются.

Начнем с угла  $\vartheta = 0^\circ$ , и пусть полоса  $A(0^\circ)$  лежит слева от  $B(0^\circ)$ , тогда для угла  $180^\circ$  все будет наоборот: полоса  $A(180^\circ)$  (она, разумеется, совпадает с  $A(0^\circ)$ , но направлена в другую сторону) лежит справа от  $B(180^\circ)$ . Поэтому, когда мы будем поворачивать полосу от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , в какой-то момент одна полоса должна «перейти» через другую, а следовательно, пересечет ее.

**19. Указание.** Площадь треугольника  $ABC$ , с одной стороны, равна  $AB \cdot h$ , а с другой — сумме площадей треугольников  $ACD$  и  $BCD$ . Две эти площади можно записать как произведение периметра на радиус вписанной окружности (для  $ACD$ ) и как произведение  $(BC + CD - BD) \cdot r$  (для  $BCD$ ). Нужный результат получится, если приравнять эти выражения и воспользоваться равенством касательных, проведенных к окружностям из точек  $A, B, C, D$ .

**21. Решение.** Пусть  $a_1, \dots, a_n$  — наши числа,  $P$  — их произведение. По условию  $a_i - P/a_i$  делится на  $n$ . Тогда и  $a_i^2 - P$  делится на  $n$ . Остается сложить эти равенства для всех  $i$ .

**22. Ответ.**  $1/2 < r < 4$ .

**23. Решение.** Это задача на «дискретную непрерывность». Рассмотрим вначале первый десяток сапог, и если он не годится (скажем, левых сапог больше 5), будем сдвигаться: после группы (1, 10), рассмотрим группу (2, 11), потом (3, 12) и т. д. В какой-то момент в десятке окажется больше правых сапог (почему?), а так как число левых сапог за один шаг изменяется не более чем на 1, то будет момент, когда в десятке окажется ровно 5 левых сапог.

**24. Ответ.** Может.

**Решение.** Один из способов: как только последняя цифра становится равной 1 или 2, поменять порядок цифр так, чтобы она стала первой цифрой. Поскольку после этого Федя может спокойно пропускать до 7 увеличений, а с другой стороны, последняя цифра станет равной 1 или 2 не позднее, чем после 5 увеличений, Федя гарантирует себе успех.

**25. Ответ.**  $n = 1$ ,  $x = k$ ,  $y = -k - 1$ . При  $n > 1$  решений нет.

**26. Решение.** Середина отрезка  $KL$  делит отрезок  $CO$  в отношении  $1 : 3$ . Соответственно, точка  $C$  лежит на пересечении данной окружности и окружности, гомотетичной ей с коэффициентом  $-3$  относительно этой точки.

**27. Решение.** Напишем под каждым из этих ста чисел  $a_i$  число  $1 + a_i$ . Тогда при стирании двух чисел из верхнего ряда стираются также два числа нижнего ряда, и вместо них пишется их произведение. Например:

|             | стерли                     | получили                                                   |
|-------------|----------------------------|------------------------------------------------------------|
| верхний ряд | $\frac{1}{5}, \frac{1}{8}$ | $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{40} = \frac{14}{40}$ |
| нижний ряд  | $\frac{6}{5}, \frac{9}{8}$ | $\frac{54}{40}$                                            |

Отсюда очевидно, что результат в нижнем ряду всегда будет равен произведению  $2 \cdot (3/2) \cdot (4/3) \cdot \dots = 101$ . В верхнем ряду в конце концов получится, таким образом, число 100.

**28. Решение.** а), б) Это возможно. Проведем плоскость и поставим три куба на эту плоскость так, чтобы все три соприкасались (это легко). Они соприкасаются с плоскостью по трем квадратам. Остается прижать три других куба к плоскости с другой стороны так, чтобы каждый «нижний» квадрат пересекался с каждым «верхним».

**29. Решение.** Перемножив несколько первых членов, мы получим такие числа:

$$A_2 = \frac{7}{9}, \quad A_3 = \frac{13}{18}, \quad A_4 = \frac{7}{10} = \frac{21}{30}, \quad A_5 = \frac{31}{45}, \quad \dots$$

Нетрудно заметить, что они удовлетворяют формуле

$$A_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3n(n+1)}.$$

Зная ответ, уже нетрудно доказать по индукции, что эта формула, а следовательно, и неравенство, выполняется для всех  $n$ .



*Другой способ.* Представим и числитель, и знаменатель в виде произведения двух сомножителей:

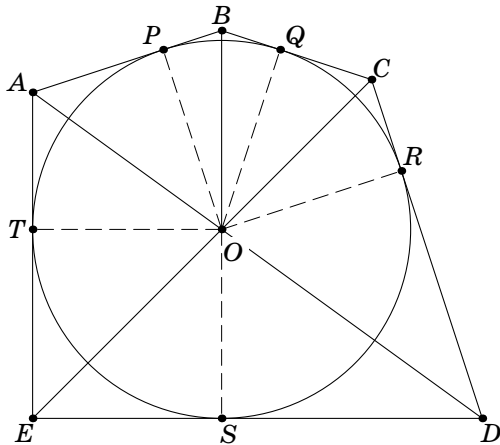
$$k^3 - 1 = (k - 1) \cdot (k^2 + k + 1) = a_k b_k,$$

$$k^3 + 1 = (k + 1) \cdot (k^2 - k + 1) = c_k d_k.$$

Очевидно,  $c_k = a_{k+2}$ ,  $b_k = d_{k+1}$ . Отсюда сразу следует, что в нашем произведении сокращаются почти все члены, кроме одного-двух в начале и в конце, и можно выписать произведение в конечном виде.

**30. Решение.** Опустим из  $O$  пять перпендикуляров  $OP$ ,  $OQ$ ,  $OR$ ,  $OS$ ,  $OT$  в точки касания на сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$  и  $EA$  соответственно. Это позволяет записать 5 равенств соответствующих углов (например,  $\angle BOP = \angle BOQ$ ,  $\angle COQ = \angle COR$  и т. д.).

Отсюда следует, что угол  $SOP$  вдвое больше угла  $EOA$ , и угол  $SOQ$  вдвое больше  $DEC$ . Так как углы  $EOA$  и  $DEC$  равны, как вертикальные, то и  $\angle SOP = \angle SOQ$ . Сверх того,  $\angle POB = \angle BOQ$ . Отсюда следует, что углы между  $BO$  и перпендикуляром  $OS$ , отсчитанные по и против часовой стрелки, равны. Следовательно, оба они равны  $180^\circ$ , что и требовалось.



**31. Решение.** Годаются, например, все числа вида  $333\dots 35$ . Квадрат такого числа равен  $11\dots 122\dots 25$ .

Причина в том, что если поставить впереди числа ноль, то имеем:  $0,333\dots 35 \approx 1/3$ , соответственно квадрат такого числа приближенно равен  $1/9 = 0,111\dots$

**32. Указание.** Пусть  $P$  — середина  $BB'$ ; введем дополнительно точки  $E$  и  $E'$  — середины отрезков  $AB$  и  $AB'$ . Теперь следует

1) доказать подобие треугольников  $ADE$  и  $C'E'A$  (именно в таком порядке вершин);

2) доказать подобие треугольников  $DEP$ ,  $PE'C'$  и  $DAC'$ ;

3) наконец, доказать, что треугольник  $DPC'$  подобен прямоугольному треугольнику  $AED$ .

**33. Ответ.** При  $k \geq 3$ .

**Решение.** Если допустить, что дорог не более 2, то города расположены цепочкой, и ясно, что в дальние города нельзя попасть, минуя менее двух (а для самого дальнего — даже трех) городов. Для  $k = 3$  расположим города в виде восьмиугольника, и из каждого пустим 3 дороги: две из них — стороны восьмиугольника, а третья соединяет данную вершину с противоположной.

**34. Решение.** Воспользуемся следующей леммой.

**Лемма.** Если имеется группа из  $2^n$  боксеров, разделенных на 2 подгруппы, причем известно место боксеров в каждой подгруппе, то можно за  $n$  дней определить места всех боксеров уже во всей группе.

**Доказательство.** Разделим каждую из наших подгрупп еще на две: в подгруппу  $H$  включим боксеров на нечетных местах (тех, кто занимает по силе 1-е, 3-е, 5-е, ... места), в группу  $C$  — на четных. Заставим боксеров из двух групп  $H$  боксировать между собой, чтобы выяснить порядок; из соображений индукции это можно сделать за  $n - 1$  день, и за то же время можно определить порядок всех четных боксеров. Остается заметить, что теперь для каждого боксера имеется, самое большее, один боксер, относительно которого неясно, сильнее он или слабее (например: если выяснилось, что боксер из первой подгруппы  $H$  находится по силе между 11-м и 13-м боксером второй подгруппы, то неясно только, сильнее ли он 12-го), и за еще 1 день можно выяснить места всех. Лемма доказана.  $\square$

Теперь решение следует из того, что  $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ , и  $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ . Разбив боксеров на пары, за 1 день можно определить место боксера в паре. Затем, объединив пары в четверки, можно еще за 2 дня определить порядок боксеров в каждой четверке, затем (объединив четверки в восьмерки и уже зная порядок мест в каждой четверке) — за 3 дня определить порядок в восьмерках. Наконец, еще за 4 дня определим порядок всех 16. При 32 боксерах понадобится еще 5 дней на пятую итерацию.

**36. Указание.** Постройте еще точку  $D$ , в которой пересекаются прямые  $AN$  и  $BM$ . Тогда верно, что

1)  $CD \perp AB$ , так что прямая  $l$  — это и есть  $CD$ , и

2) каков бы ни был диаметр  $AB$ , середина  $CD$  совпадает с  $P$ .

**Ответ.** Точка  $P$  пересечения касательных к окружности в точках  $M$  и  $N$  — искомая.

**37. Решение.** Можно считать, что  $x_1$  — наименьшее из чисел, а  $x_n$  — наибольшее. Тогда при любом  $r$ ,  $1 \leq r \leq n$ , имеем:

$$0 \leq (x_1 - x_r)(x_r - x_n) = (x_1 + x_n)x_r - x_1x_n - x_r^2.$$

При суммировании этих неравенств по всем  $r$  первое слагаемое пропадает, и остается неравенство

$$0 \geq nx_1x_n + \sum x_r^2 = nx_1x_n + 1,$$

что и требуется.

**38. Указание.** Нужно воспользоваться двойственностью между точками и окружностями (каждой окружности соответствует пара противоположных точек сферы, такая что проходящая через них ось перпендикулярна окружности, и каждой точке — большая окружность). Тогда задача сводится к двойственной: точки считаются эквивалентными, если можно одну перевести в другую, не задевая окружностей. Иными словами, дело сводится к тому, чтобы понять, на сколько частей  $n$  окружностей делят сферу (и дополнительно учесть, что окружности соответствуют все-таки не одна точка, а пара точек).

**Ответ.** а) 11, б)  $1 + n(n - 1)/2$ .

**39. а) Решение.** Существуют разные системы дорог. Наиболее изящная: сопоставим города вершинам 4-мерного куба (сравните с задачей 33), а дороги — ребрам этого куба и его главным диагоналям. Иначе говоря, каждому городу сопоставляется набор из 4 единиц и нулей, например, (0100), и два города соединены дорогой, если соответствующие наборы отличаются либо ровно в одном месте, либо во всех четырех.

**б) Указание.** Предположим, что система дорог (не более 4 из каждого города) удовлетворяет требованию. Нужно последовательно доказывать о такой системе ряд утверждений:

1) из каждого города выходит ровно 4 дороги,

2) если из  $A$  ведут дороги в  $B$  и  $C$ , то  $B$  и  $C$  не соединены дорогой (таким образом, среди замкнутых путей нет «треугольников»),

3) для каждого города  $A$  есть ровно один город  $Z$ , в который можно, пройдя через 1 город, прийти двумя путями, так что каждый город лежит ровно на одном замкнутом пути длины 4.

Таким образом, все 16 городов расположены на четырех «квadrатах»  $A_i B_i C_i D_i$ , и из каждого города ведет еще по 2 дороги в другие квадраты. Остается разобрать возможное расположение этих дорог и убедиться, например, в том, что неизбежно возникают дополнительные «треугольники» или «квадраты», которых быть, по доказанному ранее, не должно.

**Замечание.** Попробуйте сами разобраться: можно ли построить такую систему дорог для 17 городов.

### ХІІІ Турнир городов (1991/92)

**1. Указание.** Пусть  $Z$  — центр второй окружности. Поскольку  $ZO \perp AB$ , точка  $O$  делит дугу  $AOB$  пополам. Отсюда следует, что  $\angle ABO = \frac{1}{2}\angle ABC$ ;  $BO$  — биссектриса угла  $ABC$ . Но это значит, что симметрия относительно  $BO$  переводит  $A$  в  $C$ .

**2. Ответ.** Может.

**Решение.** Можно, конечно, указать маршрут, но изящнее следующее рассуждение. Заметим сначала, что если бы ладья обязана была (вместо условия задачи) ходить всякий раз на соседнее поле, т. е. передвигаться по вертикалям и горизонталям только в порядке 1—2—3—4, то требовалось бы просто нарисовать на доске  $4 \times 4$  замкнутый маршрут, что несложно.

Теперь покажем, как свести нашу задачу к этой. У нас ладья не может ходить на соседнюю горизонталь, а может ходить по линиям только в порядке 2—4—1—3. Перенумеруем горизонтали и вертикали доски именно в таком порядке. Сведение закончено! Теперь ладья должна ходить всякий раз на соседнюю клетку.

**3. Указание.** У обеих дробей выражения, начиная с тройки, совпадают; обозначим эту часть через  $z$  (вычислять  $z$  не требуется). После этого задача сводится к элементарной: доказать, что

$$\frac{1}{2+z} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+z}} = 1.$$

**4. Указание.** Поскольку все числа неотрицательны, вслед за наибольшим по модулю числом должно стоять равное ему и нуль (в любом порядке).

**Ответ.** 0,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{4}$ , 0,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{4}$ .

**5. Указание.** Радиус третьей окружности равен полусумме радиусов первых двух, а центр расположен на середине  $AB$ , так что расстояние от центра до стороны угла — тоже полусумма соответствующих расстояний.

**6. Указание.**  $n^2 + 9n - 2$  делится на  $n + 11$ , откуда  $2n + 2$  делится на  $n + 11$ .

**Ответ.** Девочек больше.

**7. Указание.** Отношение сторон треугольника (в данном случае — треугольников  $ABC$  и  $ADC$ ) равно отношению соответствующих синусов. Отсюда легко следует, что  $\sin \angle ACD = \sin \angle ACB$ . Так как эти углы различны, то один из них острый, другой тупой.

**8. Указание.** Воспользуйтесь решением задачи 4.

**9. Решение.** Самый богатый рыцарь не мог быть ничьим вассалом, так что общее число вассалов не более 31. Соответственно баронов не могло быть более 7.

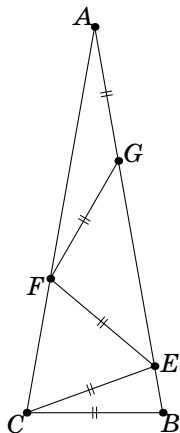
Пример для семи баронов: имеется 24 «вассала первого порядка», над ними стоят 6 баронов (по 4 вассала у каждого), и эти бароны сами являются вассалами еще одного барона.

**10. Ответ.**  $\angle BCD = 70^\circ$ .

**Решение.** Забудем на время о точке  $D$  и построим один за другим три равнобедренных треугольника  $BCE$ ,  $CEF$ ,  $FEG$ : сначала выберем на  $AB$  точку  $E$  так, что  $BC = CE$ , затем на  $AC$  — точку  $F$  так, что  $CE = EF$ , и наконец, опять на  $AB$  точку  $G$  так, что  $EF = GF$ . Легко вычислить углы всех этих треугольников; этот подсчет показывает, что треугольник  $FGA$  тоже равнобедренный. Но тогда

$$AG = GF = EF = CE = BC,$$

т.е. точка  $G$  совпадает с  $D$ . Теперь уже нетрудно вычислить и угол  $BCD$ .



**11. Ответ.** Да, возможно.

**Решение.** а) Самый простой способ: представить каждое число в виде произведения двух. А именно, составим две таблицы  $4 \times 4$ , заполним первую числами 1, 2, 3, 4 так, чтобы каждое встретилось 4 раза, по разу в каждой строке и каждом столбце, а вторую — аналогично числами 1, 5, 7, 11. Если их расставить аккуратно, то при перемножении каждое из произведений от  $1 \cdot 1$  до  $4 \cdot 11$  встретится по одному разу, и полученная таблица будет удовлетворять условию.

Задача б) решается тем же способом.

**12. Решение.** Положим  $b_n = a_n + 1$ . Тогда  $b_1 = 10$  и рекуррентное соотношение, как показывает прямая проверка, принимает вид:  $b_{k+1} = 3b_k^4 - 8b_k^3 + 6b_k^2$ . Поэтому  $b_2$  содержит не менее 2 нулей,  $b_3$  — не менее 4 нулей, и т.д.

**13. Решение.** а) Следует закрашивать клетки, двигаясь прямолинейно «ходом коня». Считая, что клетки доски занумерованы как в шахматах, нужно закрасить клетки b1 и a3; d2, c4, b6 и a8, и т.д. Их окажется как раз 17.

б) Разобьем квадрат на 9 квадратов  $3 \times 3$ . Легко видеть, что в каждом не более 2 закрашенных клеток, причем эти закрашен-

ные могут располагаться только двумя способами (какими?). Это дает оценку 18. Теперь остается «дотянуть» оценку, т.е. доказать, что невозможно расположить в *каждом* из 9 квадратов по 2 раскрашенные клетки.

**14. Решение.** Пусть у начального восьмиугольника  $AB = a$ ,  $BC = b \neq a$ . Пусть, например,  $a > b$ .

Пусть  $a_1$ ,  $b_1$  — стороны первого получившегося внутри восьмиугольника  $A_1B_1 \dots H_1$ . Тогда числа  $a, b, a_1, b_1$  удовлетворяют соотношениям:  $a_1 + \sqrt{2}b_1 = a$ ,  $b_1 + \sqrt{2}a_1 = b$ .

Вычитая эти равенства одно из другого, мы видим, что

$$(\sqrt{2} - 1)(b_1 - a_1) = a - b.$$

Но это означает, что  $b_1 - a_1$  в два с лишним раза больше, чем  $a - b$ . С другой стороны, ясно, что сами числа  $a_1, b_1$  меньше, чем числа  $a$  и  $b$ . Поэтому после нескольких операций разность  $b_k - a_k$  станет больше, чем сами числа, что абсурдно.

**15. Ответ. а)** Число  $n$  может равняться любому числу от 1 до 10 ( $10 = 9 + 1$ ), а также 12 или 18 ( $9 + 3, 9 + 9$ ).

**б)** Это возможно, если  $n \leq m$ , а также если  $n = m + k$ , где  $k$  — делитель  $m$ .

**Решение.** Для доказательства того, что все эти числа годятся, проще всего выложить все шоколадки в ряд, и резать острым ножом нужные куски (легко видеть, что при этом каждая шоколадка режется не более одного раза), например, при  $n = 12$  каждые три шоколадки делятся на четверых.

Докажем теперь, что этими случаями все исчерпывается. Пусть  $n > m$ , т.е. каждому досталось менее одной шоколадки. Построим граф, вершинами которого служат школьники и шоколадки, а ребра соединяют школьника с шоколадкой, кусок которой ему достался. Так как школьнику достается менее одной шоколадки, то из каждой шоколадки выходит ровно 2 ребра. Граф, вообще говоря, несвязен: рассмотрим одну из его компонент связности. Пусть в ней  $k$  шоколадок, следовательно,  $2k$  ребер. Она не имеет циклов (в любой цикл вошло бы поровну школьников и шоколадок, а отсюда сразу следовало бы, что  $r$  шоколадок поделили между  $r$  школьниками, что противоречит условию  $n > m$ ). Следовательно, в этой компоненте  $2k + 1$  вершин, т.е.  $k + 1$  школьников. Выходит, что  $k + 1$  школьников поделили между собой  $k$  шоколадок (без остатка), откуда и следует нужное соотношение.

**16. Решение.** Пусть  $\angle A = 2\alpha$ . Поскольку  $AC$  — биссектриса угла  $A$ , имеем:  $\angle BAC = \angle CAD = \alpha$ . Площадь четырехугольника равна сумме площадей треугольников  $ABC$  и  $ADC$ , т. е. равна

$$\frac{1}{2}AC \cdot (AB + AD) \cdot \sin \alpha.$$

Будем считать, что  $AB \neq AD$  (в противном случае  $AC$  — ось симметрии и доказательство элементарно). Выразим квадраты равных отрезков  $BC$  и  $CD$  по теореме косинусов:

$$AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \alpha = BC^2 = CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos \alpha.$$

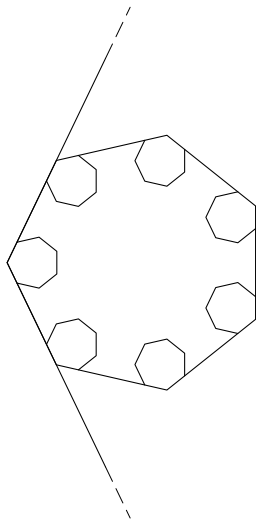
Приводя подобные члены, получаем:

$$AB^2 - AD^2 = 2(AB - AD) \cdot AC \cdot \cos \alpha, \quad \text{или} \quad AB + AD = 2AC \cdot \cos \alpha.$$

Подставляя выражение для  $AB + AD$  в написанную выше формулу площади, получаем нужный результат.

**17. Решение.** Это можно сделать. Нарисуем, например, правильный семиугольник со стороной 5 см, и вырежем из него 7 правильных семиугольников со стороной 1 см из каждого угла. После этого от большого семиугольника останется невыпуклый симметричный 42-угольник, или, говоря иначе: мы составили большой правильный семиугольник из восьми симметричных фигур: семи семиугольников и одного 42-угольника. Все они удовлетворяют условию задачи.

Для того чтобы закончить решение, надо теперь семь больших семиугольников, в свою очередь, вписать в один еще больший (скажем, со стороной 25 см), и продолжать эту процедуру неограниченно, следя за тем, чтобы была заполнена вся плоскость.



**20. Решение.** Достаточно доказать, что одна из сторон треугольника  $APQ$  получается из другой поворотом на  $120^\circ$  (или  $240^\circ$ ). Будем считать, что треугольник расположен в плоскости комплексных чисел и что точка  $M$  совпадает с началом координат, т. е. с нулем. Тогда  $A, B, C$  — комплексные числа, сумма которых равна 0. Пусть  $\xi = \sqrt[3]{1}$ ; тогда  $P = \xi B$ ,  $Q = \xi^2 C = \xi^2(-A - B)$ .



Отсюда

$$Q - P = \xi^2(-A - B) - \xi B = B - \xi^2 A = \xi^2(P - A),$$

что и требовалось.

**21. Указание. а), в)** Пусть разность прогрессии  $d$  есть  $k$ -значное число. Докажите, что  $(k + 1)$ -я цифра очередного члена прогрессии, во-первых, может оставаться неизменной не более 8 шагов (почему не девяти?), и во-вторых, каждый раз меняется не более чем на 1, следовательно, пробегая значения  $0, 1, \dots, 8$ , наконец в какой-то момент станет равной 9.

**Решение. б)** Подходит прогрессия с первым членом 1 и разностью 125. Ее последний, 72-й член равен  $9001 - 125 = 8876$ .

**23. Решение.** Если в первый день цена любого товара равнялась  $A$ , то через месяц каждая цена имела вид  $2^k 3^r A$ , где  $k + r = 30$  или 31 (числу дней в месяце). Поэтому отношение цен любых двух товаров равно  $(3/2)^s$ . Поскольку все цены различны,  $s$  принимает по меньшей мере 9 разных значений, и отношение максимальной и минимальной цен не меньше  $(3/2)^9$ . Так как  $3^6 = 729 > 512 = 2^9$ , то это отношение больше 27.

**24. Решение.** Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей. Очевидно, достаточно доказать, что треугольники  $AOD$ ,  $BOC$  равносторонние, тогда все следует из соображений симметрии.

Поскольку эти треугольники подобны, то имеем

$$\frac{AD}{AO} = \frac{BC}{CO} = \frac{AD + BC}{AC} = 1.$$

Таким образом, эти треугольники с углом  $60^\circ$  равнобедренные, откуда и следует, что они равносторонние.

Заметим, что верно и обратное: если трапеция равнобедренная, то оба треугольника  $AOD$ ,  $BOC$  равносторонние, откуда

$$AD + BC = AO + OC = AC.$$

**25. Указание.** Коробку  $55 \times 55$  можно разгородить на три отделения:  $25 \times 25$  (для новой монеты),  $30 \times 55$  и  $30 \times 25$ . Остается доказать, что все старые монеты уместятся в двух отделениях.

**26. Указание.** См. решение задачи 30.

**Ответ.**  $51^\circ$ .

**28. Решение.** Эту задачу проще всего решить в координатах. Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпадало с вершиной прямого угла  $C$ , а координаты двух других вершин были

$A(-4, 0)$ ,  $B(0, 3)$ . Несложно вычислить, что точки пересечения биссектрис с продолжениями сторон имеют координаты  $(0, -12)$ ,  $(6, 6)$ ,  $(12, 0)$ .

**29. Решение.** Предположим, что

$$a_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + a_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + \dots + a_n \cdot \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$

Кроме того, очевидно,  $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$ . Вычтем одно из другого с некоторым коэффициентом  $b$ , который подберем чуть позже; получим

$$(a_1 - b) \cdot \overrightarrow{OA_1} + (a_2 - b) \cdot \overrightarrow{OA_2} + \dots + (a_n - b) \cdot \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$

Выберем полуплоскость, в которой лежит первая половина наших векторов  $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \dots, \overrightarrow{OA_{n/2}}$  (если  $n$  нечетно, то пусть в ней лежит  $[n/2]$  векторов), и пусть  $v$  — перпендикулярная ей ось. Выберем  $b$  так, чтобы коэффициенты при векторах, стоящих в одной полуплоскости, были положительны, а в другой — отрицательны (для этого требуется, чтобы было  $a_k > b > a_{k+1}$ , где  $k = [n/2]$ ). Теперь ясно, что все слагаемые проектируются на  $v$  с одним и тем же знаком, так что проекция не равна нулю.

**30. Решение.** Три последовательные тройки имеют сумму не меньше 87, следовательно, оставшееся число не больше 13. Пример: выписаны числа 13, 13, 13, 3, 13, 13, 3, 13, 13, 3.

**31. Решение.** а) Если одно из чисел отрицательно, то сумма всех остальных больше  $S$ . Это противоречит тому, что каждое из них по отдельности меньше, чем  $S/(n-1)$ .

в) Если  $a + b < S/(n-1)$ , то сумма остальных  $n-2$  чисел больше, чем  $S(n-2)/(n-1)$ . Это опять-таки противоречит тому, что каждое по отдельности меньше  $S/(n-1)$ . Итак, для любых трех чисел  $a + b \geq S/(n-1) > c$ , что доказывает пункт б).

**32. Решение.** Пусть сторона  $AB$  имеет длину 3, тогда и  $AE = 3$ . Если точка  $C$  движется по продолжению  $AE$  от  $E$  к бесконечности, то точка  $D$  движется по окружности радиуса 3 с центром в  $B$ . Отсюда легко следует, что треугольник  $ADE$  будет прямоугольным только при одном определенном положении точки  $C$ . Соответственно, достаточно доказать, что если  $AC = 4$ , то треугольник  $ADE$  — прямоугольный. Это проще всего доказать в координатах. Примем, что  $A = (0; 0)$ ,  $B = (3; 0)$  и  $C = (0; 4)$ . Тогда  $E = (0; 3)$  и  $D = (1,2; 2,4)$ ; очевидно, угол  $D$  прямой.

**33. Ответ.** Больше то число, у которого под первым корнем стоит большее число, т.е.  $\sqrt{m + \dots}$ .

**34. Указание.** 1) Углы треугольника  $A_1B_1C_1$  равны углам треугольника  $ABC$ .

2) Углы, которые новые прямые образуют со сторонами нового треугольника, — те же, что углы, которые прямые  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  образовывали со сторонами треугольника  $ABC$ .

**35.** См. решение задачи 41.

**36. Решение.** Допустим сначала, что найдется сектор, в который никогда не попадет ни одна фишка. Занумеруем все остальные секторы от 1 до  $n - 1$ . Запишем для каждой фишки номер сектора, в котором она находится, и сложим квадраты этих чисел (при этом каждый сектор учитывается столько раз, сколько в нем фишек). При одном преобразовании два числа  $k$  заменяются на  $k - 1$  и  $k + 1$ , а поэтому сумма возрастает на 2:  $(k - 1)^2 + (k + 1)^2 = 2k^2 + 2$ . Но очевидно, что наша сумма ограничена (хотя бы числом  $(n - 1)^2(n + 1)$ ), и потому не может возрастать слишком долго. Итак, рано или поздно в каждом из секторов оказывается фишка.

Правда она может впоследствии из него уйти. Однако очевидно, что если в одном из двух соседних секторов появились фишки, то в дальнейшем в любой момент хотя бы один из них будет непустым. Поскольку уже доказано, что рано или поздно фишки появляются в каждом секторе, то получается, что хотя бы в одном из двух соседних есть фишки, а этого достаточно.

**37. Указание.** Подсчитайте, на какую степень двойки делится это произведение, и убедитесь, что она нечетна.

*Другой способ.* Примените постулат Бертрана (в указанном интервале лежит некоторое простое  $p$  такое, что  $2p$  уже выходит за его пределы).

**38. Решение.** Площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной  $a$  и углом  $\alpha$  при вершине равна  $(a^2 \sin \alpha)/2$ . Поскольку сторона вписанного правильного треугольника равна длине любого звена нашей ломаной (а угол при вершине —  $60^\circ$ ), задача будет решена без труда, если доказать, что сумма углов ломаной не меньше  $180^\circ = 3 \cdot 60^\circ$ .

Пусть  $\alpha_i = \angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$  (при этом  $\alpha_1 = \angle A_{51}A_1A_2$ ). Переместим угол  $A_2A_3A_4$  параллельно самому себе так, чтобы точка  $A_3$  совместилась с  $A_1$ . Теперь от точки  $A_1$  отложены углы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  (между  $A_1A_2$  и смещенной  $A_2A_3$ ) и  $\alpha_3$ . Смещая подобным же образом углы  $\alpha_5, \alpha_7, \dots, \alpha_{51}$ , мы увидим, что от  $A_1$  отложены все углы  $\alpha_1, \dots, \alpha_{51}$ . При этом последняя сторона  $A_{51}A_1$  образует развер-

нутый угол с первой стороной  $A_1A_{51}$ , откуда и следует нужное утверждение.

**39. Указание.** Если  $k < r$ ,  $s < t$ , то

$$\frac{1}{k+s-1} + \frac{1}{r+t-1} > \frac{1}{k+t-1} + \frac{1}{r+s-1}.$$

**Решение.** Если мы зачеркнем числа, стоящие на побочной диагонали (все они равны  $1/n$ ), то сумма будет равна 1. Назовем это расположение оптимальным. Остается заметить, что из любого другого расположения зачеркиваемых чисел можно прийти к оптимальному, последовательно меняя числа попарно таким образом, что на каждом шаге их сумма уменьшается.

**40. Указание.** Докажите сначала, что для любых двух точек  $A$ ,  $B$  и любого треугольника  $C_1C_2C_3$  сумма

$$\pm S_{ABC_1} \pm S_{ABC_2} \pm S_{ABC_3}$$

при подходящей расстановке знаков (зависящей от взаимного расположения наших пяти точек) равна утроенной площади треугольника  $ABM$ , где  $M$  — центр тяжести  $C_1C_2C_3$ .

Отсюда уже нетрудно вывести, что для произвольных трех треугольников можно расставить знаки так, что сумма 27 площадей (из которых часть взята со знаком минус) будет равна  $27 \cdot S_T$ , где  $T$  — треугольник, образованный центрами тяжести данных треугольников. Из этого вытекает, как частный случай, наша задача.

**41. Указание.** Первое взвешивание: положим на чаши 50-ю серебряную (считая первой самую тяжелую) и 51-ю золотую монету. Если, например, золотая тяжелее, то 51-я серебряная легче, чем предыдущие 50 серебряных и чем 51 золотая, следовательно, 51-я серебряная, а также все следующие за ней, — заведомо не годятся; отброшена половина серебряных монет. Точно так же надо отбросить положенную на чашу золотую монету (она слишком тяжела) и предыдущие 50. Таким образом, осталась приблизительно половина от исходного числа монет. Если тяжелее серебряная, то все аналогично, хотя в первом случае отбрасывается 101 монета, а во втором только 100. В любом случае «в игре» остается около половины золотых монет и около половины серебряных. Остается воспользоваться тем, что  $2^8 = 256 > 201$ .

Семи взвешиваний заведомо недостаточно уже потому, что 7 взвешиваний могут иметь только  $2^7$  исходов («больше — меньше»), что меньше числа монет.

**Ответ.** 8 взвешиваний.

**42. Решение.** Из рассмотрения по отдельности двух типов разложений числа  $n$  — тех, в которых наименьший сомножитель строго больше, чем  $b + 1$ , и тех, в которых он равен  $b + 1$ , — легко получить неравенство:  $V(n, b) \leq V(n, b + 1) + V(n/(b + 1), b)$ . Теперь остается применить двойную индукцию по  $n$  и  $b$ . Единственный нюанс состоит в том, что индукция по  $b$  ведется не сверху, а снизу: от  $b + 1$  к  $b$ . (При  $b = n$  утверждение задачи очевидно.) Дело сводится к неравенству

$$V(n, b) \leq \frac{n}{b(b + 1)} + \frac{n}{b + 1},$$

которое совпадает с нужным.

## XIV Турнир городов (1992/93)

**1. Решение.** Возьмем произвольную точку  $A$ . Если через нее проходит 11 прямых, то доказывать нечего. Если же прямых не более 10, то на одной из них лежит не менее 11 точек (включая саму точку  $A$ ). Пусть это точки  $A, B, \dots, H$ . Возьмем теперь точку  $Z$  вне этой прямой; через нее проходят прямые  $ZA, ZB, \dots, ZH$ , т.е. по меньшей мере 11 прямых.

**Замечание.** На Турнире городов задача была дана в эквивалентной, но более громоздкой формулировке, а именно: «В банде 101 террорист. Все вместе они в вылазках ни разу не участвовали, а каждые двое встречались в вылазках ровно по разу. Докажите, что один из террористов участвовал не менее, чем в 11 различных вылазках».

**2. Указание.** Если спроектировать два соседних центра на одну из сторон параллелограмма (любую), то расстояние между проекциями равно половине стороны. Отсюда легко вывести, что длины противоположных сторон полученного четырехугольника равны.

**3. Решение.** Допустим противное: все кратные  $M$  имеют четную сумму цифр.

Можно считать, что  $M$  не кончается нулем. Предположим сначала, что предпоследняя цифра  $M$  — не девятка. Рассмотрим теперь числа вида  $N_k = 10^r M + kM$  ( $r$  — фиксировано и достаточно велико). Поначалу цифры первого и второго слагаемого не «цепляют» друг друга, и, по предположению, та и другая сумма четны.

В какой-то момент впервые первая цифра числа  $kM$  будет складываться с последней ненулевой цифрой числа  $10^r M$ . При этом последняя цифра увеличится на 1, затем, через некоторое время, — на 2 и т.д. В некоторый момент произойдет перенос в следующий разряд, и в этот момент сумма цифр станет нечетной (здесь используется то предположение, что сумма цифр до сих пор все время была четной).

Если же предпоследняя цифра числа  $M$  равна 9, то нужно сначала заметить, что среди чисел  $M, 2M, 4M, 8M, 16M, \dots$  есть число, предпоследняя цифра которого — не 9, и затем повторить то же рассуждение для этого числа.

**4. а) Решение.** Это сразу следует из того, что  $BC > AC$ ,  $BC + AC > AB$ .

**б) Указание.** Проведите через точки  $A, D$  прямые, параллельные  $BC$ . Одна из них отсекает от четырехугольника  $ABCD$  тре-

угольник  $ADX$ , к которому следует применить результат пункта а).

**5. Ответ.**  $2n$ .

**Решение.** Ясно, что  $2n$  кусков достаточно (обклеиваем сначала 4 боковых грани, а потом две боковых и верх-низ). Для доказательства того, что меньшим числом кусков не обойтись, рассмотрим две боковых грани, имеющие общее ребро, и разобьем их на  $n$  перпендикулярных этому ребру полосок ширины 1 см и длины  $2n$  см. Если есть хоть одна полоска, вдоль которой не идут куски обклейки, то только чтобы заклеить одну эту полоску, уже нужно  $2n$  кусков. Если же такой полоски нет, то вдоль каждой полоски идет по крайней мере один кусок (вот уже  $n$  кусков), и эти  $n$  кусков не задевают верхнюю грань. Для того чтобы ее обклеить, нужно еще не менее  $n$  кусков.

**6. Ответ-указание.** Длины сторон квадратов образуют ряд Фибоначчи  $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ , и центры нечетных (по порядку) квадратов лежат на прямой, проходящей через первый квадрат с угловым коэффициентом 3, а центры четных — на перпендикулярной ей прямой с угловым коэффициентом  $-1/3$ .

**Замечание.** В условии, данном на Турнире городов, было добавлено излишнее условие «центры всех квадратов, кроме первого».

**7. Решение.** Разобьем каждый график на два графика, разделенные точкой  $d$ . Первый задает возрастающую функцию  $C \cdot 10^{x-d}$ , второй — убывающую. При этом все возрастающие графики образуют *однопараметрическое* (а не 2-параметрическое!) семейство, поскольку  $C \cdot 10^{x-d} = C' \cdot 10^x$  (для любого  $d$  легко найти подходящее  $C'$ ). То же верно для убывающих графиков. Таким образом, можно сказать, что график  $f(x)$  составлен из кусков функций  $C \cdot 10^{-x}$  и функций  $C' \cdot 10^x$ .

Теперь заметим, что

- 1) из двух возрастающих графиков всегда один выше другого, так что максимум равен одному из них;
- 2) возрастающий пересекается с убывающим только в одной точке, причем графики симметричны друг другу относительно этой точки.

Отсюда следует, что весь график функции можно разбить на несколько кусков «возрастающий-убывающий» (или наоборот, «убывающий-возрастающий»), симметричных относительно своей середины. Из этого и следует утверждение задачи.

**9. Ответ.** Можно тогда и только тогда, когда  $n$  нечетно.

**10. Указание.** Границы всех треугольников, вершины которых лежат на  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ , проходят через одну общую точку, лежащую на «средней линии» квадрата: отрезке, соединяющем середины сторон  $BC$  и  $AD$ . Найдите ее.

**11. Ответ.** Можно. Годаются, например, многочлены

$$P(x) = (x^2 + 1)^2, \quad Q(x) = 4x(x + 1)(x - 1).$$

**12. Указание.** Положение всех 4 точек полностью определяется двумя углами:  $\angle ABC$  и  $\angle BCD$ . Обозначим их  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, и пусть  $\alpha'$  — угол, соответствующий положению точки  $A'$ . По условию,  $\angle A'BD = \angle ABD$ . Учтывая, что треугольник  $BCD$  — равнобедренный, нетрудно вычислить, что  $\alpha' = 180^\circ - \alpha - \beta$ .

Дальнейшее несложно. Для вычисления угла  $\beta'$ , соответствующего точке  $D'$ , достаточно в предыдущую формулу подставить  $\beta$  и  $\alpha'$  вместо  $\alpha$  и  $\beta$ . Получаем

$$\beta' = 180^\circ - \beta - \alpha' = \alpha.$$

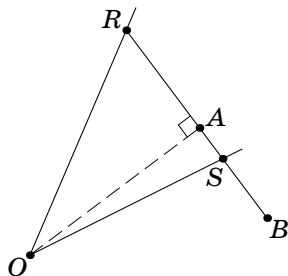
Итак, после первой пары преобразований углы  $(\alpha, \beta)$  заменяются на

$$(\alpha', \beta') = (180^\circ - \alpha - \beta, \alpha).$$

Следующие шаги оставляем читателю.

**Ответ.** Положение совпадет с первоначальным на третьем шаге.

**26. Указание.** Восставим из  $A$  перпендикуляр  $r$  к  $AO$ , и пусть  $R, S$  — точки пересечения прямой  $r$  со сторонами угла. Искомая точка  $B$  лежит на  $r$  и делит отрезок  $RS$  в том же отношении, что и  $A$ , но внешним образом. Поэтому  $RA : AS = RB : BS$ .



**14. Указание.** В этой последовательности встречаются все числа вида  $2^{2k}$ . Для доказательства этого нужно аккуратно разобраться, на сколько следующий член больше предыдущего (вначале — на 1, затем несколько раз — на 2, потом на 3, и т. д.). К примеру: вслед за числом 16 встречаются числа 20, 24, 28 («перевалили» за квадрат пятерки, превысив его на 3), 33, 38 («перевалили» за квадрат 6, превысив квадрат на 2), 44, 50, 57, 64.

**15. Решение.** Такой набор можно построить, начав с любого не слишком маленького квадрата. Начнем, например, с числа  $c_1 = 5$ .



Имеем:

$$5^2 = 25 = 25 \cdot 1 = (13 + 12) \cdot (13 - 12) = 13^2 - 12^2.$$

Поэтому можно взять  $c_2 = 12$ . Аналогичным образом, записываем:

$$12^2 = 144 = 72 \cdot 2 = (37 + 35) \cdot (37 - 35) = 37^2 - 35^2,$$

и можно взять  $c_3 = 35$ . Далее аналогично.

**Замечание.** Начать с числа 4 нельзя потому, что следующие числа будут 3, 4, 3, 4..., что противоречит условию. Если же начать с числа 5 или больше, то легко убедиться, что числа в последовательности будут возрастать.

**16. Решение.** Это легко сделать при  $n = 2$ . Составляя вместе несколько кубиков  $2 \times 2$  одинаковыми гранями, мы получаем нужный куб для любого четного  $n$ . При нечетном  $n$  это невозможно, поскольку каждый белый кубик должен давать три контакта «белый-черный», и то же верно для черных. Отсюда получается, что число черных кубиков должно быть равно числу белых, что невозможно.

**Ответ.** При всех четных  $n$  и только при них.

**17. Указание.** См. указание к задаче 14.

**Ответ.** 19 (числа 1, 4, 16, 64, ...,  $2^{18}$ ).

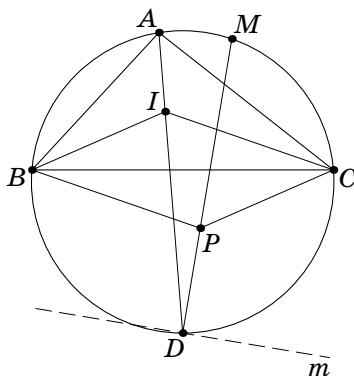
**18. Указание.** Для того чтобы получить желаемую расстановку за 3 хода, нужно первым (например, горизонтальным) ходом добиться того, чтобы все элементы, которым следует стоять в одной строке, оказались в разных столбцах; тогда вторым ходом можно все их загнать в нужную строку.

Пример, когда двух ходов недостаточно, можно получить уже для таблицы  $2 \times 2$ .

**Ответ.** 3 хода.

**19. Указание.** Пусть  $I$  — центр вписанной окружности. Очевидно,  $IBPC$  — параллелограмм. Поэтому если спроектировать точки  $I, B, P, C$  на любую прямую  $m$ , то для проекций  $I', B', P', C'$  будет выполняться соотношение: сумма двух отрезков из числа  $P'B', P'I', P'C'$  равна третьему. (В качестве прямой  $m$  лучше всего выбрать перпендикуляр к  $DP$ , проведенный через точку  $D$  (тогда  $P' = D$ ). Основной вспомогательный момент — доказать, что  $DC = DB = DI$ .)

Это уже приблизительно то, что нам нужно; остается доказать, что отношения этих отрезков к отрезкам  $MA, MB, MC$  равны одному и тому же числу.



**Замечание.** Предположим, что треугольник  $ABC$  — равносторонний. Тогда точки  $P$  и  $D$  совпадают; как же провести прямую  $DP$ ? Ответ состоит в том, что ее можно провести как угодно, поскольку в этом случае утверждение задачи верно для *любой* точки  $M$  на описанной окружности.

**20. Набросок решения.** Технически сложная задача. Основные идеи решения таковы:

а) На каждой грани плоскость пересекает не более 2 ребер, т. е. не более двух третей всех ребер грани. Суммируя эти неравенства по всем граням, получаем оценку  $2/3$  от общего числа, или 66 ребер.

б) *Нулевой шаг* построения: возьмем тетраэдр  $ABCD$ , ясно, что плоскость может пересечь 4 из шести его ребер, например  $AC$ ,  $AD$ ,  $BC$  и  $BD$ .

Следующий за ним *первый шаг* построения: построим второй тетраэдр  $ABEF$  с таким расчетом, чтобы он имел с первым общее ребро  $AB$ , целиком лежал внутри него и был лишь немного меньше (ребро  $EF$  параллельно  $CD$  и лежит внутри первого тетраэдра). Тогда их разность (точки, лежащие внутри  $ABCD$  и не принадлежащие  $ABEF$ ) образуют невыпуклый многогранник с 10 ребрами и есть плоскость, пересекающая все ребра, кроме двух. Далее надо опять «вычитать» из полученного многогранника новые тетраэдры.

в) Возьмем произвольную плоскость, не пересекающуюся с многогранником (для определенности скажем, что она целиком лежит левее его) и будем сдвигать ее параллельно самой себе, пока она не окажется целиком правее многогранника. Положение плоскости

определяется одной координатой (назовем ее  $x$ ), и периметр фигуры, получающейся в пересечении плоскости с многогранником, является функцией  $L(x)$ .

Следует доказать, что эта функция

1) кусочно-линейна и

2) (**основной момент доказательства!**) ее график является вогнутым на тех участках, где при переходе через вершину ребра не заканчиваются, а только появляются новые ребра.

Поскольку свойство вогнутости графика не меняется при зеркальном его отражении, отсюда следует также и обратное: график вогнут там, где новые ребра не появляются, а только исчезают существовавшие ранее. (График может стать выпуклым только в том случае, когда часть ребер лежит слева от вершины и в ней заканчивается, а какие-то другие ребра, напротив, только возникают в этой самой вершине.)

Теперь предположим, что при каком-то значении  $x$  плоскость пересекает все ребра многогранника. Тогда левее этой точки ребра всегда только появляются, а правее — только исчезают. Следовательно, график  $L(x)$  всюду является вогнутым. Но это не согласуется с тем очевидным фактом, что на концах рассматриваемого интервала плоскость не пересекается с многогранником (следовательно  $L(x) = 0$ ), тогда как внутри интервала  $L(x)$  принимает положительные значения.

**21. Указание.** Оба ортоцентра лежат на высоте, опущенной из  $C$  (она общая для треугольников), причем высоты, опущенные из  $A$  и  $B$ , параллельны.

**Ответ.**  $c \cdot |\operatorname{ctg} \varphi|$ .

**22. Ответ.** Нет, не обязательно. Пусть, например, в 1-м подъезде 1-го дома живет 5 кошек и 1 собака, а во 2-м подъезде — 1 кошка и 5 собак. Во втором доме соотношение: 49 и 10, 1 и 6. Тогда в первом доме живет 6 кошек и 6 собак, а во втором — 50 и 16.

**23. Решение.** Возьмем  $p$  — один из простых множителей числа  $a - b$ , и пусть  $a$  делится на  $k$ -ю степень  $p$ , а  $b$  — на  $m$ -ю. Очевидно,  $k + m > 0$ , иначе  $c$  — не натуральное. Более того, оба числа  $k$  и  $m$  положительны, иначе бы  $a - b$ , вопреки предположению, не делилось на  $p$ . Но тогда, в силу взаимной простоты трех чисел,  $c$  не делится на  $p$ , и  $a - b$  делится на  $p^{k+m}$ . Это возможно только в случае  $k = m$ , т.е.  $a - b$  делится на четную степень  $p$ , и так для любого простого  $p$ .

**24. Ответ.** Нет. В самом деле, вершины куба можно разделить на «четные» и «нечетные» (четные —  $A, C, B', D'$ ; соседняя с четной — всегда нечетная), так что муравей всегда переходит из четной вершины в нечетную, и наоборот. Отсюда следует, что число попаданий в четные вершины может отличаться от числа попаданий в нечетные не более чем на 1.

**25. Указание.** Разность этих чисел, с одной стороны, имеет вид  $2^m(2^n - 1)$ , причем, очевидно,  $n < 7$ . А с другой стороны, разность равна  $a \cdot 10^r$ . Таким образом, второй сомножитель  $2^n - 1$  должен делиться на  $5^k$ . Отсюда следует, что  $r = 1$ , и остается простой перебор.

**Ответ.** 2 и 32; 4 и 64.

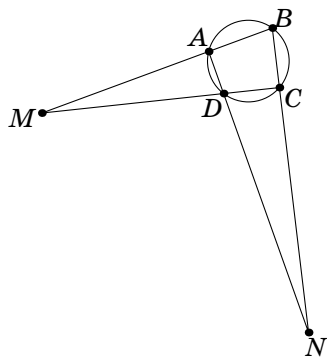
**26. Решение.** Треугольники  $ACM$  и  $BDM$  подобны (по двум углам), следовательно,

$$\frac{CM}{AC} = \frac{BM}{BD}.$$

Аналогично из подобия треугольников  $ACN$  и  $BDN$  получаем

$$\frac{CN}{AC} = \frac{DN}{BD}.$$

Числители справа равны, следовательно, равны и числители слева, что и требуется.



**27. Решение.** Формула для общего элемента таблицы такова:

$$a_{ij} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (i-1)}{j(j+1) \dots (j+i-1)}$$

(доказательство по индукции). Подставив сюда  $i = 1993$ ,  $j = 1$ , получаем ответ:  $1/1993$ .

**28. Решение.** Если начать выбрасывать камни, то мы должны несколько раз выбросить из первой кучи по 217 камней, пока не получится набор  $(40, 199, 18)$ ; затем мы придем к набору  $(40, 25, 18)$ , из которого уже ничего не вычтешь.

Однако нельзя ли поправить положение, добавляя в одну из куч камни (в тот или иной момент)? Нет, это ничего не изменит. В самом деле, если после добавления, например, в первую кучу мы затем производим выбрасывание, то выбрасывать придется непременно из той же первой кучи, т. е. мы вернемся к исходному положению. Точно так же, если сделать несколько прибавлений,

а уж затем — выбрасывания, легко убедиться, что и здесь нам придется «идти обратно по уже пройденному пути».

**Ответ.** Нет, нельзя.

**Замечание.** На Турнире городов фактически были по ошибке даны числа 1993, 199 и 19, что резко упрощает задачу: достаточно заметить, что в любой момент в любой куче будет нечетное число камней.

**29. Указание.** Пусть  $S$  — сумма чисел,  $P$  — их произведение. Если  $S$  равно 3, 4 или 5, то  $P < S$ , и слова  $C$ . лишены смысла. Далее, если  $S > 6$ , то для однозначного выбора ответа недостаточно знать, что  $P > S$ . Остается исследовать случай  $S = 6$ .

**Ответ.** 1, 1 и 4.

**30. Указание.** Докажите, что

1) угол  $ACB$  вдвое больше угла  $AOB$ ;

2) угол  $ADB$  тоже вдвое больше угла  $AOB$ .

**31. Указание.** Надо доказать, что  $x * y = x - y$ .

**Ответ.** 61.

**Замечание.** 1932 — год рождения Н. Н. Константинова.

**32. Ответ.** 12 или 13.

**Указание.** Среди одноклассников есть либо один, который дружит со всеми, либо один, кто не дружит ни с кем (причем одно исключает другое). Допустим первое. Исключим из класса того, кто дружит со всеми, тогда тот, кто дружил с одним, остался без друзей. Исключим и его. Мы исключили двух человек, из которых один — друг Пети. Далее доказываем по индукции.

**33. Решение.** Если разделить все углы треугольника на 20, то вначале получится три целых числа (1, 1, 7). После первого же шага в каждом треугольнике получится по два «дробных» угла (не кратных 20). Отсюда следует, что и на каждом следующем шаге в каждом из новых треугольников будет хотя бы один дробный угол (а следовательно — хотя бы два).

**35. Ответ.** Нет, нельзя.

**Доказательство.** (Н. Васильев). Будем для определенности считать, что вначале красная точка лежит слева, синяя — справа.

Сопоставим красной точке функцию  $f(x) = -x$ , а синей — функцию  $g(x) = 2 - x$ , иными словами — отражение числовой оси относительно точки 0 и относительно точки 1 соответственно. Набору точек на нашей прямой сопоставим композицию соответствующих функций, считая слева направо: например, последовательности

(к, к, с, к) сопоставим функцию

$$f(f(g(f(x)))) = f(f(g(-x))) = f(f(2+x)) = f(-2-x) = 2+x.$$

При этом заданной вначале комбинации (к·с) соответствует функция  $L(x) = x - 2$ , тогда как комбинации (с·к) — функция  $R(x) = x + 2$ . Между тем, добавляя или стирая две соседние точки (к·к) или (с·с), мы не меняем произведения преобразований.  $\square$

**36. Указание.** Пусть первый квадрат имеет сторону  $1/2$ , поставим его в левый нижний угол так, чтобы он лишь едва задел диагональ. Его периметр равен 2. Таким образом, осталось набрать  $1991 + \epsilon$ , причем мы можем работать в двух квадратах (правый нижний и левый верхний), у каждого из которых сторона лишь чуть-чуть меньше  $1/2$ . Далее требуется только аккуратность.

**Ответ.** Да, может.

**37. Указание.** Докажите сначала, что если  $OM$  растет, то и  $ON$  растет (точнее: верно соотношение  $OM^2 - ON^2 = (b^2 - a^2)/4$ ). Таким образом, достаточно максимизировать  $OM$ . Докажите, что оно максимально, если максимальна разность  $\sin \angle C - \cos \angle C$ , т. е. при  $\angle C = 3\pi/4$ . В этом случае

$$OM + ON = (a + b)(\sqrt{2} + 1).$$

**38. Решение.** Назовем наследника «средним», если он ни бедный, ни богатый, т. е. если он получает от 100 до 10 000 рублей. Пусть при некотором способе дележа  $p$  — число бедных наследников и  $P$  — сумма, которая им досталась (суммарно, на всех);  $q$  и  $Q$  — число средних наследников и сумма, доставшаяся им; наконец,  $r$  и  $R$  — число богатых и сумма. Тогда  $p + q + r = m$  и  $P + Q + R = M$  заданы и не зависят от способа дележа: это число наследников и величина наследства.

Допустим, что мы нашли способ, при котором  $R < 100P$ . Тогда

$$\begin{aligned} M = P + Q + R &< 101P + Q < \\ &< 9999p + 10\,000q < 10\,000(p + q) < 10\,000m. \end{aligned}$$

Но тогда, распределив деньги поровну, мы получим дележ, в котором  $R = 0$ , что противоречит условию.

**Замечание.** На Турнире городов задача формулировалась чуть иначе: «...при любом способе дележа у богатых окажется не меньше денег, чем у бедных». При такой формулировке возникает дополнительная, чисто техническая трудность: надо отдельно разобрать случай, когда богатых и бедных вообще нет ( $R = P = 0$ ).

**39. Решение.** Рассмотрим число  $d = (\text{НОД написанных чисел})$ ; очевидно, после первого шага  $d$  может только убывать. Таким образом, даже если процесс бесконечен, то начиная с некоторого момента,  $d$  больше не меняется. При этом его можно записать в виде:  $d = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n$ , где числа  $k_i$  — целые, но не обязательно положительные.

Остается вывести из этого, что любое *достаточно большое* число, кратное  $d$ , может быть записано в виде

$$a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n$$

с положительными  $k_i$ , и следовательно, можно еще выписать лишь конечное количество новых чисел.

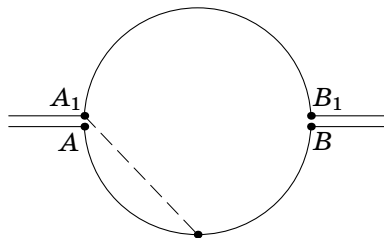
**40. Ответ.** Да, существует.

**Решение.** Зададим  $f(x)$  при  $\frac{1}{2} < x < 1$  формулой  $f(x) = x - \frac{1}{2}$ , и произведем три поворота этого куска графика вокруг начала координат на углы  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$ . Получим функцию, которая удовлетворяет условию задачи:

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}, & \text{если } \frac{1}{2} < x < 1; \\ -\frac{1}{2} - x, & \text{если } 0 < x < \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2} - x, & \text{если } -\frac{1}{2} < x < 0; \\ x + \frac{1}{2}, & \text{если } -1 < x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Доопределить ее в точках разрыва тем или другим способом нетрудно.

**41. а) Решение.** Представим себе, что на реке есть круглое озеро диаметром 1405 метров (река впадает в него и вытекает узкими рукавами, расположенными на концах диаметра в близких друг к другу точках  $A$ ,  $A_1$  и  $B$ ,  $B_1$  соответственно). Очевидно, самая дальняя точка от левого берега — середина дуги  $AB$ , но и из



этой точки расстояние до  $A_1$  составляет около  $1405/\sqrt{2} < 1000$  м. С другой стороны, пересекая диаметр озера, перпендикулярный  $AB$ , лодка неизбежно окажется на расстоянии 1405 метров от двух берегов суммарно, т.е. расстояние от одного из них будет более 700 м.

**Ответ.** Необязательно.

**б) Ответ.** Может.

**Идея решения.** Нужно сначала доказать, что если из любой точки реки описать круг радиуса 800 м, то он заходит по крайней мере на один из берегов. Таким образом, вся река является объединением «зоны левого берега» (все точки реки, находящиеся ближе чем за 800 м от левого берега) и «зоны правого берега». Они, разумеется, пересекаются, и из того, что они покрывают реку целиком, следует, что по зоне их пересечения можно проплыть реку из конца в конец.

**Замечание.** Это трудная техническая задача (это первая задача на Турнире городов, которую во время Турнира не решил ни один участник), причем для полного решения необходимо так или иначе использовать теорему Жордана о замкнутой кривой.

**42. Указание.** а), б) Будем обозначать знаком (+) наличие признака у данного растения  $A$ , и знаком (–) его отсутствие. Рассмотрим всевозможные тройки

$$\{\text{номер признака } N, \text{ растение } A, \text{ растение } B\},$$

и сосчитаем двумя способами количество таких троек, в которых  $A$  и  $B$  различаются по признаку  $N$ .

Предполагается, что для каждой пары растений  $(A, B)$  число различий не меньше 51. Тогда и в целом доля различных троек не меньше, чем 51 %.

С другой стороны, для каждого признака  $N$  в отдельности число пар (плюс, минус) может лишь ненамного превосходить половину от числа всех пар: например, если число растений 50, то всего пар имеется  $50 \cdot 49/2$ , а максимальное число пар (+, –) равно  $25^2$ .

Прямой подсчет показывает, что для 51 растения эти соображения уже ведут к противоречию, тогда как для 50 нужно еще немного «дотягивать» оценку. Воспользуйтесь тем, что если у растений  $A, B$  различен ровно 51 признак, то у каждого растения  $C$  четное число различий либо с  $A$ , либо с  $B$ .

**Ответ.** б) Нет.



## XV Турнир городов (1993/94)

**1. Ответ.** Можно. Оно равно альтернированной сумме чисел, стоящих в 5 остальных вершинах (т.е. первое число берется с плюсом, второе с минусом, третье опять с плюсом и т.д.).

**2. Ответ.** Нет (они лежат на средних линиях треугольника).

**3. Указание.** Примените к произвольному составному числу  $N$  обратную операцию: из него разрешается вычесть любой его делитель, кроме него самого, единицы и  $N/2$ . Ясно, что для любого числа больше 4 всегда можно выполнить эту операцию так, чтобы оно стало при этом четным, т.е. составным (из четного числа можно вычесть 2, из нечетного — любой делитель). Следовательно, данное число можно уменьшить, и оно останется составным. Остается разобраться только с числами от 4 до 8.

**4. Ответ.** Да, может. Допустим, например, что турнир шел в шесть кругов, С выиграл 4 партии и проиграл 5, В выиграл 3 и проиграл 3, А выиграл 2 и проиграл одну. Составить таблицу не представляет труда.

**5. Решение.** В качестве  $x^2$ ,  $y^3$  и  $z^2$  годятся, например, числа 9, 27, 36 и числа, получаемые из этого набора умножением на 6-ю степень любого числа.

Другая бесконечная серия решений: пусть  $y$  — любое нечетное число, тогда  $y^3$  тоже нечетно, и можно подобрать два последовательных натуральных числа  $x$ ,  $x+1=z$  так, что  $x+z=y^3$ .

**Ответ.** Бесконечно.

**6. Решение.** По условию задачи треугольники  $BCM$  и  $ACN$  равнобедренные. По одному углу в них известно (это углы  $B$  и  $A$ ), что позволяет прямым счетом узнать все остальные углы, в том числе и угол  $MCN$ . Он равен полусумме углов  $A$  и  $B$  (кстати, это верно независимо от условия о прямоугольности данного треугольника). Но поскольку нам дано еще, что угол  $C$  — прямой, то полусумма  $A$  и  $B$  равна  $45^\circ$ .

**7. Ответ.** 85 и 45.

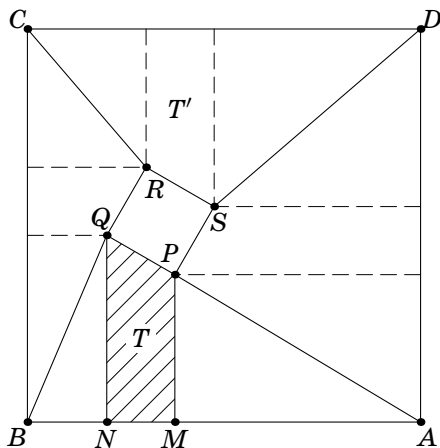
**8. Указание.** Докажите, что среди чисел не может быть трех последовательных, соответственно наименьший набор чисел —  $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ .

**Ответ.** 27 точек.

**9. а) Указание.** Все строки, кроме, может быть, первой, состоят из целых неотрицательных чисел. Кроме того, вторая строка кончается нулем. Поэтому третья кончается двумя нулями, и т. д.

**б) Ответ.** 10. Такое количество можно получить, если, например, начать со строки 0504030201.

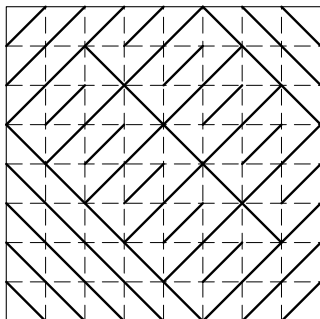
**10. Указание.** Задача решается с помощью ножниц и клея: следует разрезать каждый из четырехугольников на 3 части, так что некоторые части будут равны, а из оставшихся можно склеить равные.



Говоря конкретнее, опустим из точек  $P$ ,  $Q$  перпендикуляры  $PM$ ,  $QN$  на  $AB$ . Они делят четырехугольник  $ABQP$  на два треугольника и трапецию  $T = PMNQ$ . Проделав аналогичную операцию с тремя оставшимися четырехугольниками, мы получим в общей сложности 8 треугольников и 4 трапеции. Очевидно, треугольники попарно равны. Что же касается трапеций, то сдвинув трапецию  $T$  на вектор  $\overrightarrow{PS}$ , мы «склеим» ее с противоположной трапецией  $T'$ , так что получится прямоугольник. Легко видеть, что он равен прямоугольнику, полученному аналогичным способом из двух оставшихся трапеций.

**11. Решение.** Эту задачу проще всего решить в координатах. Пусть первые две вершины имеют координаты  $(0, 0)$  и  $(a, 0)$ , тогда нетрудно сообразить, что две оставшиеся имеют координаты  $(b, b)$  и  $(b, a - b)$ . Отсюда находим координаты середин сторон, соединяющие их векторы и т. д.

**12. Ответ.** Можно нарисовать картинку, в которой 21 часть.



**13. Решение.** Нетрудно найти два таких числа, например, 99 и 108. Теперь добавим к ним нужное число девяток и получим числа:

9 999 999 999 999, 10 000 000 000 098 и 10 000 000 000 107.

Кстати, нетрудно видеть, что аналогичной процедурой можно получить любое конечное число чисел с равными суммами  $m + S(m)$ .

**14. Ответ. а)** Можно взять числа Фибоначчи:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34

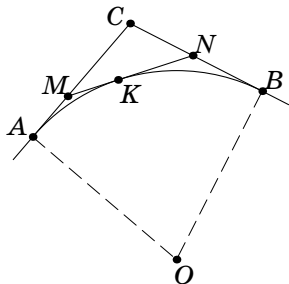
и, например, еще раз 34.

**б)** Годаются гири 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41 (они подбираются в соответствии с формулой  $w_i = w_{i-1} + w_{i-3}$ ).

**15. Решение.** Очевидно, рассмотрения заслуживает только случай, когда отрезок  $MN$  сидит «плотно»: так, что точки  $M$  и  $N$  лежат на сторонах угла, и сверх того, он касается окружности в некоторой точке  $K$ . Во всех остальных случаях нетрудно сдвинуть концы отрезка так, чтобы его длина увеличилась.

Вычислим теперь длину плотно сидящего отрезка  $MN$ . Пусть  $O$  — центр окружности,  $R$  — ее радиус. Тогда

$$\begin{aligned} MN &= MK + KN = \\ &= R \cdot \operatorname{tg} \angle MOK + R \cdot \operatorname{tg} \angle NOK. \end{aligned}$$



Учитывая еще, что  $\angle MOK = \frac{1}{2}\angle AOK$ ,  $\angle NOK = \frac{1}{2}\angle BOK$ , мы видим, что

$$\angle MOK + \angle NOK = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle AOC.$$

Но с другой стороны,  $AC = R \cdot \operatorname{tg} \angle AOC$ . Остается доказать, что тангенс суммы больше, чем сумма тангенсов, для чего достаточно вспомнить формулу тангенса суммы.

**16. Ответ.** Нет.

**Решение.** В самом деле, девятки всегда появляются позже, чем единицы. Отсюда следует, что единственный кандидат на роль  $n$ , который мог бы подойти — число  $99 \dots 9$ . Но в этом случае легко видеть, что нулей будет меньше, чем других цифр.

**17. Указание.** Достаточно рассматривать случай, когда треугольник переносится в направлении стороны другого треугольника, поскольку всякий сдвиг может быть получен последовательным выполнением двух таких сдвигов.

**18. Решение.** Предположим, что  $N$ -угольник разрезан на несколько многоугольников (будем их называть малыми) так, что никакие 4 последовательные вершины не принадлежат одному многоугольнику. Тогда по меньшей мере каждый второй угол  $N$ -угольника разрезан одной из линий деления. Поэтому к каждому двум последовательным углам  $N$ -угольника прилежит не менее трех углов малых многоугольников, и следовательно, среднее арифметическое этих прилежающих углов меньше  $120^\circ$ . Также и среднее арифметическое углов, прилежающих к любой вершине внутри  $N$ -угольника, не больше  $120^\circ$  (равенство будет, только если в вершине сходится ровно 3 угла). Отсюда следует, что и в целом среднее значение углов малых многоугольников меньше  $120^\circ$ . Но тогда они не могут все быть семиугольниками.

**19. Указание.** Будем считать, что координаты вершин квадрата — единицы и нули, тогда в начальный момент координаты каждого из 4 центров тяжести — дроби со знаменателем  $1/3$  или  $2/3$ . Можно считать, что ни один кузнечик не прыгает два раза подряд. Докажите (в этом предположении), что после каждого прыжка координаты каждого из кузнечиков — дроби со знаменателем  $3^k$ , причем число  $k$  будет строго наибольшим у только что прыгнувшего кузнечика. Отсюда и следует отрицательный ответ на вопрос.

**20.** Перепишем левую часть в виде  $x^2(x+a/2)^2 + (1+bx/2)^2 + r$ . Как нетрудно видеть,  $r = x^2(2 - (a^2 + b^2)/4)$ . Если допустить, что

заданное неравенство неверно, то все три слагаемых неотрицательны, откуда легко следует, что уравнение не имеет корней, вопреки условию.

**21. Указание.** Точки  $K$ ,  $L$  и середины двух противоположных сторон (любых) образуют параллелограмм, в котором нам известны все стороны и одна диагональ. Поэтому можно построить оба этих параллелограмма, т. е. найти середины всех четырех сторон. Остальное уже очевидно.

**22. Решение.** Предположим противное. Тогда ясно, что ученики учатся, по меньшей мере, в пяти классах. Выберем те 5 классов, в которых учится больше всего учеников. Если хотя бы из 5 пришло по 2 ученика, то эти 5 пар образуют 10 учеников, вопреки условию.

Если по 2 (или более) ученика пришло из 4 классов, то в этих 4 классах учится не более  $14 \cdot 4 = 56$  учеников, а остальные четверо учатся в других классах; возьмем 8 человек из этих классов, и еще двух «со стороны». Остальные случаи (по два или более учеников пришло из 3 или менее классов) также разбираются без труда.

**23. Решение.** Опустим из  $O$  перпендикуляры  $OB_1$  и  $OB_2$  на  $A_1A_n$  и  $A_1A_2$ ; из первого неравенства следует неравенство для длин:  $OB_1 \leq OB_2$ . Аналогично, опустив перпендикуляры  $OB_3$ ,  $OB_4$  и т. д. на  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$ , ..., получаем серию неравенств:

$$OB_1 \leq OB_2 \leq OB_3 \leq OB_4 \leq \dots \leq OB_n \leq OB_1.$$

Поскольку первый член совпадает с последним, все неравенства являются равенствами. Но это как раз и означает, что  $O$  равно отстоит от всех сторон  $n$ -угольника, т. е. окружность с центром  $O$  и радиусом  $OB_1$  является вписанной, что и требуется.

**24. Решение.** Если рассмотреть только фишки, стоящие на нечетных местах (1, 3, 5, 7, 9), то за каждую операцию переворачивается две фишки. Поэтому количество синих фишек на нечетных (так же, как и четных) местах всегда будет четным.

**Ответ.** Нет.

**25. Решение.** Пусть  $O$  — центр окружности. Имеем:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA_1} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = 2\overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

По соображениям симметрии, то же верно для  $\overrightarrow{OB_2}$ ,  $\overrightarrow{OC_2}$ .

**26. Решение.** Условие существования корня состоит в том, что

$$a_{n+1}^2 \geq 4a_n a_{n+2}, \quad \text{или} \quad \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Таким образом, дробь  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  постоянно убывает (не менее, чем вчетверо), и рано или поздно станет меньше единицы, после чего начнет уменьшаться  $a_n$ . Так как последовательность натуральных чисел не может убывать неограниченно, ответ на вопрос б) отрицательный.

Отсюда же видно, что если взять достаточно большое  $a_1$  ( $a_1 \gg 1$ ) и (или) достаточно большое  $a_2$  (желательно  $a_2 \gg a_1$ ), то выписанные неравенства допускают последовательность любой заранее заданной длины. В частности, для того чтобы получить последовательность длины 10, достаточно взять  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2^{10}$ .

**27. Решение.** На первом шаге начинающий должен отломить себе кусок  $1 \times 6$  (и съесть), а в дальнейшем повторять ходы партнера (если тот отломил вдоль, то и первый отламывает вдоль, если поперек — тоже «поперек»).

**Замечание.** Еще одна задача на «симметричную стратегию».

**29. Решение.** Согласно условию,  $1000x + y = 3xy$ , или  $3y = 1000 + y/x$ . Отсюда легко следует, что  $1000 < 3y < 1010$ , так что  $y = 334$ , 335 или 336. Но тогда  $y/x < 4$ , так что годится только число 334. Отсюда  $y/x = 2$ , и искомые числа — 167 и 334.

**30. Указание.** Докажите сначала, что  $AP = AN$ . Отсюда треугольники  $APM$  и  $ANQ$  равны (по стороне и двум углам).

**31. Решение.** Докажем, что при любом числе  $3N$  депутатов можно составить комиссию из  $N$  депутатов. Так как число пощечин равно числу депутатов, то имеется депутат, получивший не более одной пощечины. У него не более двух врагов (тот, кого он бил и, возможно, тот, кто его бил). Введем этого депутата в комиссию, а двух его врагов удалим из парламента. Далее — по индукции.

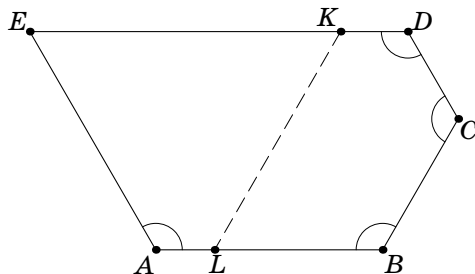
**Замечание.** Еще одна задача, прямо связанная с политической ситуацией.

**32. Решение.** Предположим, что это не так, тогда сумма выбранных чисел равна 45. Занумеруем строки от 0 до 9 снизу вверх, а столбцы — от 1 до 10 слева направо. Тогда каждое число равно сумме номера своей строки и столбца, иногда — минус 10.

Но сумма номеров строк равна 45, а сумма номеров столбцов — 55. Получается, что  $45 = 45 + 55 - 10k$ , что невозможно.

**33. Ответ.** Существует.

**Решение.** Построим пятиугольник  $ABCDE$ , у которого равны 4 угла, и три стороны образуют геометрическую прогрессию:  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \alpha$  и  $|AB| = 1$ ,  $|BC| = q < 1$ ,  $|CD| = q^2$ . Повернем его на угол  $\alpha$ , проведем гомотетию с коэффициентом  $q$  и параллельно переместим так, чтобы точка  $A$  совместилась с  $B$ . Тогда, очевидно,  $B$  совместится с  $C$ ,  $C$  — с  $D$ , а точки  $D$  и  $E$  перейдут в некоторые точки  $K$ ,  $L$ , лежащие на лучах  $DE$  и  $BA$  соответственно. Таким образом, пятиугольник  $BCDKL$  подобен  $ABCDE$ . При подходящих  $\alpha$  и  $q$  (можно, например, взять  $\alpha = 120^\circ$ ,  $q = 0,5$ ) точки  $K$  и  $L$  окажутся на сторонах  $DE$  и  $AB$ , а не на их продолжениях, и разрез по линии  $KL$  удовлетворяет условию.



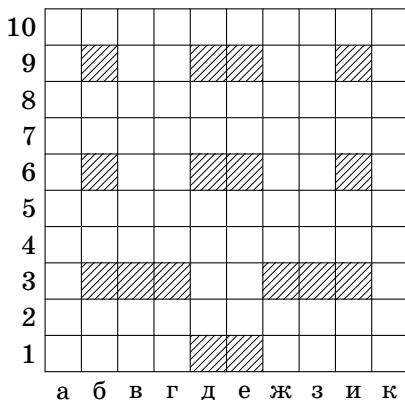
**34. Решение.** Лемма. *Существует такое  $n$ , что с помощью шаблона можно за несколько операций погасить все  $n$  горящих лампочек, расположенных подряд.*

**Доказательство.** Рассмотрим ряд из  $N$  горящих лампочек и начнем их, одну за другой, тушить с помощью шаблона, начиная с левого края. Пусть длина шаблона равна  $s$ ; ясно, что можно последовательно погасить все лампочки, кроме, может быть,  $s - 1$  последних. Таким образом, при любом  $N$  от нашего расположения можно перейти к некоторому расположению, в котором горят только последние  $s$  лампочек (или их часть). Так как  $N$  произвольно, можно найти два разных числа  $M$  и  $N$ , которые приводят к одному и тому же конечному расположению. Тогда очевидно, что с помощью шаблона можно погасить все лампочки из набора  $n = N - M$  подряд. Лемма доказана; заметим, что примененный метод вполне аналогичен доказательству известной теоремы «для

любого  $N$  есть число, делящееся на  $N$  и состоящее из нулей и единиц».  $\square$

Дальнейшее очевидно. Обратной операцией можно из пустого набора (все лампочки погашены) получить подряд  $n$  горящих лампочек. Сдвинув теперь этот ряд на 1 и изменив состояние всех лампочек, мы получим, что горит только первая и последняя.

**35. Решение.** б) Вот пример «непродолжаемой» расстановки кораблей:



а) Корабль  $1 \times 4$  поставить можно. Чтобы доказать, что теперь разместится очередной корабль  $1 \times 3$ , отметим 8 вспомогательных кораблей  $1 \times 3$ , параллельных друг другу, с интервалом в 2 клетки ( $a1-a3$  и  $a6-a8$ ;  $г1-г3$  и  $г6-г8$ ;  $ж1-ж3$  и  $ж6-ж8$ ;  $к1-к3$  и  $к6-к8$ ). Каждый поставленный корабль может задеть (пересечь или коснуться) не более двух отмеченных, поэтому останется незадетым один из отмеченных кораблей и, стало быть, очередной корабль  $1 \times 3$  поставить можно.

Пусть уже расставлены корабль  $1 \times 4$ , два корабля  $1 \times 3$  и часть кораблей  $1 \times 2$  (но не менее трех). Чтобы доказать, что теперь разместится очередной корабль  $1 \times 2$ , отметим аналогичным образом 12 вспомогательных кораблей  $1 \times 2$ , параллельных друг другу, с интервалом в 2 клетки ( $a1-a2$ ,  $a5-a6$  и  $a9-a10$ ; и т.д.). Принимаем то же рассуждение.

Наконец, чтобы убедиться, что можно поставить очередной одноклеточный корабль, нужно расставить 16 вспомогательных одноклеточных с интервалом 2 клетки и еще раз повторить рассуждение.



**36. Указание.** Можно, например, подобрать бесконечное число таких троек, что  $z = -y$ .

**Ответ.** Существует.

**37. Решение.** а) Достаточно заметить, что знаменатель всех чисел последовательности такой же, как у первого числа  $a_1$  (или меньше), так что в ней встречается лишь конечное число разных чисел.

б) Если  $a_1$  иррационально, то и все последующие члены иррациональны. С другой стороны, равенство  $a_r = a_s$  ( $s > r$ ), если в нем раскрыть все скобки, примет вид:  $a_r = C + 2^{r-s}a_r$ , (докажите это индукцией по разности  $s - r$ ), а это значит, что  $a_r$  рациональное.

**38. Указание.** Достаточно подобрать  $P(x)$  так, чтобы все коэффициенты были положительными у  $P^2(x)$  и  $P^3(x)$ , все прочие степени получаются как их произведения.

**Ответ.** Да, могут. Подходит, например, многочлен  $x^4 + x^3 - \varepsilon x^2 + x + 1$  при достаточно малом  $\varepsilon$ .

**39. Указание.**

$$2AK = AC + AB - BC.$$

Для доказательства следует несколько раз использовать один и тот же факт: две касательные, проведенные к окружности из одной точки (конкретнее — из точек  $A, K, D, \dots$ ) равны.

**40. Указание.** Докажите сначала, что вычеркивается непременно *вторая* цифра.

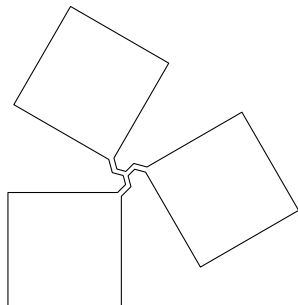
**Ответ.** 180625.

**41. Указание.** Искомая прямая определяется линейным условием «сумма ориентированных расстояний до четырех прямых  $AB, BC, CD, DA$  равна нулю». При этом расстояние в направлении внутрь четырехугольника нужно считать с плюсом, наружу — с минусом.

В трех точках  $M_{AC}, M_{BD}$  и  $M_{PQ}$  соответствующие расстояния равны попарно, поэтому сумма четырех расстояний группируется в виде двух нулей и равна нулю.

**42. Решение.** б) Можно считать, что площадь данного многоугольника  $Q$  равна 1. Рассмотрим какую-нибудь прямую  $l$  вне  $Q$  и начнем сдвигать ее параллельно самой себе в сторону  $Q$ ; любую из сдвинутых прямых мы обозначим  $l'$ . Можно считать, что при этом на  $l'$  никогда не попадет одновременно две вершины (для этого достаточно, чтобы  $l$  не была параллельна ни одной из сторон и диагоналей  $Q$ ). Следовательно, вначале на  $l'$  попадает

одна вершина, затем — небольшой треугольник при этой вершине, который будет расти. Если площадь отрезанной фигуры растёт непрерывно, то в какой-то момент она станет больше  $1/3$ , и все доказано. Скачок может произойти только в тот момент, когда  $l'$  пройдет через новую вершину; в этот момент  $Q$  разбивается на три части, из которых по крайней мере одна имеет площадь больше  $1/3$ . Если при этом она меньше  $2/3$ , то построение завершено, если же нет, то будем далее сдвигать хорду по этой части.



**а), в)** Из рисунка видно, почему увеличить число  $1/3$  нельзя: как ни проводить хорду, по одну сторону от нее останется *два* больших многоугольника, а по другую — самое большое, третий и часть «коридоров».

## XVI Турнир городов (1994/95)

1. См. решение задачи 5.

2. **Решение.** Задача имеет много решений. Одно из них: провести в окружностях параллельные диаметры  $AB$  и  $A'B'$ . Прямые  $AA'$  и  $BB'$  пересекаются в точке  $O$ .

3. **Ответ.** Например, 60, 63, 64, 66, 72. (Подумайте, почему нужно брать числа, имеющие много делителей.)

4. **Решение.** Рассмотрим любого школьника  $A$  и двух его дедов  $X$ ,  $Y$ . Если не все школьники — внуки одного из них (в этом случае доказывать нечего), то существует школьник  $B$ , который не приходится внуком  $X$  (тогда он непременно внук  $Y$ ), и школьник  $C$ , который не внук  $Y$  (следовательно, внук  $X$ ). У школьников  $B$  и  $C$  есть общий дед  $Z$ . Теперь мы утверждаем, что ни у кого из школьников нет других дедов, кроме  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . (В противном случае такой школьник не имел бы общего деда с одним из трех школьников  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .) Но для того, чтобы у трех дедов было 20 внуков (и считая по два деда на внука), нужно, чтобы хоть у одного было не менее  $2/3$  внуков от общего числа, т.е. не менее 14.

5. **Ответ.** Да, могло. К примеру, пусть на балу было 10 пар, и первая девушка имеет оценки (10, 1) (т.е. самая красивая и самая глупая), вторая — (1, 2), третья — (2, 3), ..., последняя — (9, 10). Если все юноши сдвинулись на 1 вверх, (танцевавший с первой — теперь танцует со второй, и т.д., а танцевавший с десятой — с первой) то условие будет выполнено.

6. **Решение.** Пусть  $AB$  — самое длинное ребро тетраэдра. Сложим неравенства  $AB < AC + BC$  и  $AB < AD + BD$  и перегруппируем члены; получим

$$2AB < (AC + AD) + (BC + BD).$$

Из них вытекает, что выполняется хотя бы одно из неравенств

$$AB < AC + AD, \quad AB < BC + BD.$$

Если выполнено первое, то из отрезков  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  можно составить треугольник, а три другие —  $BC$ ,  $BD$ ,  $CD$  — и так образуют треугольник. Второй случай аналогичен.

7. **Решение.** Имеем  $a + b = -(c + d)$ . Если эта сумма равна 0, то доказывать нечего. Если же она не равна нулю, то можно первое

уравнение сократить на  $a + b$  следующим способом:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + d^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + (c + d)(c^2 - cd + d^2) = \\ &= (a + b)[(a^2 - ab + b^2) - (c^2 - cd + d^2)] = 0, \\ (a^2 - ab + b^2) - (c^2 - cd + d^2) &= 0. \end{aligned}$$

Сопоставляя это с очевидным равенством

$$(a + b)^2 = (c + d)^2,$$

мы получаем  $ab = cd$ . Дальнейшее несложно.

**8. Указание.** Число способов равно числу способов разбить множество чисел  $\{2, \dots, 10\}$  на две группы: те, которые окажутся слева от 1, и те, которые окажутся справа.

**Ответ.**  $2^9$ .

**9. Решение.** Допустим, что доля непустых ящиков равна  $1/\alpha$ . Тогда среднее число орехов по *непустым* ящикам составляет  $10\alpha$ . Среднее значение квадрата по непустым ящикам не меньше квадрата среднего, т.е.  $100\alpha^2$ . Среднее значение по всем ящикам в  $\alpha$  раз меньше, т.е. не менее  $100\alpha$ . Это и дает нужную оценку.

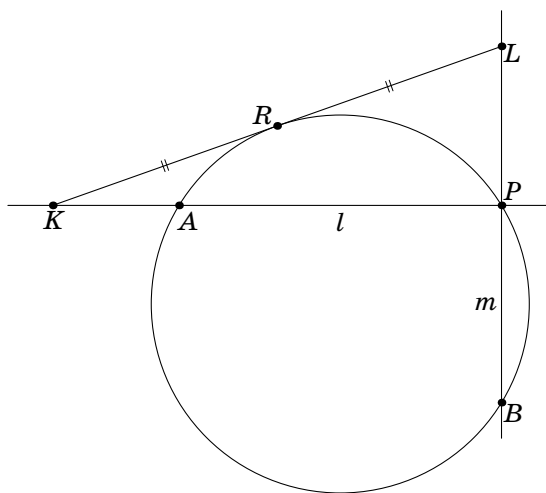
**10. Указание.** Каждый квадратик можно покрыть 4 способами, следовательно, диагональ можно покрыть  $4^8$  способами. Докажите теперь, что любое покрытие диагонали продолжается, и притом единственным образом, до покрытия всего квадрата.

*Другой способ.* Всю доску можно покрыть  $4^{64}$  способами, но при этом необходимы «согласования» на каждой границе двух квадратов. Таких границ имеется  $2 \cdot 8 \cdot 7 = 112$ , и поэтому указанное число надо уменьшить в  $2^{112}$  раз, что и приводит к числу  $4^8$ .

Этот способ недостаточно строгий (надо проверить, что согласования «независимы друг от друга»), но более идейный, поскольку в первом способе используется довольно случайным образом выбранная диагональ.

**Ответ.**  $4^8$ .

**11. Решение.** Пусть дуга  $PA$  равна  $\alpha$ , прямая  $n$  — касательная в точке  $R$  и  $K$ ,  $L$  — точки пересечения  $n$  с  $l$  и  $m$  соответственно (см. рисунок). Тогда треугольник  $PKL$  — прямоугольный,  $PR$  — медиана, откуда следует, что оба треугольника  $PRK$  и  $PRL$  — равнобедренные. Теперь прямой подсчет углов показывает, что дуга  $PR$  составляет  $2\alpha/3$ . Аналогичное рассуждение проходит для дуги  $PB$  и лежащей на ней точки  $T$ , откуда уже видно, что



дуга  $RT$  составляет треть окружности. Рассуждения для точки  $S$  аналогичны.

**12. Решение. а)** Следует построить произвольную последовательность из 100 натуральных чисел, в которой каждое следующее равно разности предыдущих, и разделить их на их общее кратное.

Построить такую последовательность нетрудно. Можно, например, взять последовательность Фибоначчи (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...) и записать ее в обратном порядке.

**б)** Знаменатель любой вновь построенной дроби не превосходит произведения знаменателей первых двух. Следовательно, для этих дробей имеется лишь конечное число возможностей (зависящее от выбора первых двух дробей).

**Ответ. а)** Да, можно. **б)** Невозможно.

**14. Решение.** Если хоть одно из чисел равно 0, то  $P = 0$ , откуда следует, что  $S = 1$ , и утверждение задачи очевидно. Пусть теперь все числа ненулевые (очевидно, можно считать, что все они положительны). Если все они равны, то  $P = S$ . Докажем теперь, что во всех остальных случаях, кроме двух рассмотренных,  $P - S > 1$ , на чем и закончится решение.

Для доказательства нужно использовать два факта:

1)  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , причем равенство возможно только в случае  $a = b$ ;

2)  $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ , причем опять-таки равенство возможно лишь при равенстве всех трех членов.

Первое хорошо известно, а второе вытекает из тождества

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc),$$

проверяемого прямым раскрытием скобок.

Теперь разобьем наши шесть чисел на две группы по три. При замене суммы шестых степеней чисел каждой группы утроенным произведением их квадратов она, согласно 2), уменьшится. Заменяя сумму  $a^2b^2c^2 + d^2e^2f^2$  на ушестеренное произведение, мы вновь ее уменьшаем. Остается аккуратно проверить, что она уменьшится больше, чем на 1.

**15. Набросок решения.** Для построения примера достаточно взять правильный  $(N - 1)$ -угольник (обычный) и концентрическую ему окружность, пересекающуюся с ним; очевидно, они как раз и образуют  $(2N - 2)$ -угольник, у которого половина сторон криволинейные, и половина — прямые. Последние можно заменить дугами окружностей большого радиуса.

Доказательство того, что большего числа сторон  $\Phi$  иметь не может, проводится по индукции. Основной шаг решения: докажите, что если окружности строятся одна за другой в порядке возрастания радиусов ( $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_N$ ), то каждая новая окружность пересекается с получившимся до того выпуклым «многоугольником» не более чем в двух точках.

**Ответ.**  $2N - 2$ .

**16. Решение.** Да, может. Возьмем уравнение с нулевым дискриминантом (что не противоречит условию) и с очень большим  $p$ . При замене  $p$  на близкое к нему  $p'$  дискриминант может стать большим. К примеру, пусть  $p = 10^{10}$ ,  $p' = 10\,000\,000\,000,1$  и  $q = q' = p^2/4$ , тогда  $D = 0$ ,  $D' > 10^9$ , т. е. корни «поправленного» уравнения отличаются один от другого больше, чем на  $10^4$ .

**17. Указание.** Можно взять тетраэдры, у которых 4 ребра имеют длину  $\sqrt{3}$ , а два скрещивающихся — по 2. У такого тетраэдра один из двугранных углов — прямой, и потому можно составить из 4 таких тетраэдров (неправильный) октаэдр. Этими октаэдрами можно замостить пространство.

**18. Решение.** Пусть  $r$  — радиус вписанной окружности. Площадь  $S_{\triangle ABC}$  равна

$$p \cdot r = \frac{1}{2} \cdot (AB + AC + BC) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot (2AB + AD + BC) \cdot r$$

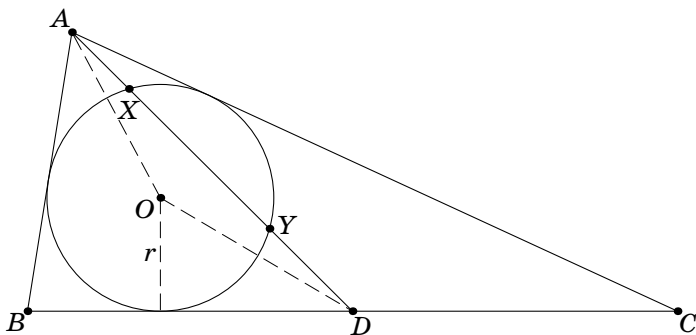
согласно условию. Поскольку она вдвое больше площади треугольника  $ABD$ , имеем:

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{4} \cdot (2AB + AD + BC) \cdot r.$$

С другой стороны,  $BC = 2 \cdot BD$ , откуда

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{4} \cdot (2AB + AD + 2BD) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot r + \frac{1}{2} \cdot BD \cdot r + \frac{1}{4} \cdot AD \cdot r.$$

Первые два слагаемых — не что иное, как площади треугольников  $ABO$  и  $BDO$  соответственно. Поскольку треугольник  $ABD$  есть объединение трех треугольников с общей вершиной в  $O$ , последнее слагаемое должно равняться площади последнего из этих треугольников, т. е.  $ADO$ . Отсюда следует, что высота этого треугольника (а она у него общая с треугольником  $XOY$ ) вдвое меньше  $r$ . Теперь уже легко найти нужный угол.



**Ответ.**  $120^\circ$ .

**19. Решение.** Справедливо неравенство:

$$\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right)(1 + a_2) \geq (1 + a_1)^2$$

(для доказательства достаточно раскрыть скобки). Запишем аналогичные неравенства со сдвигом:  $(1 + a_2^2/a_3)(1 + a_3) \geq (1 + a_2)^2$ , и т. д. Перемножив их, мы получим в точности данное неравенство, у которого обе части умножены на правую часть:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right) (1 + a_1) \dots (1 + a_n) &\geq \\ &\geq ((1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n))^2. \end{aligned}$$

Сократив, получаем требуемое.

**20. Указание.** При длине  $m + n - 1$  и более можно, «прыгая» то вперед, то назад ( $a_k = a_{k+m} = a_{k+m-n} = a_{k+2m-n} = \dots$ ), доказать, что все члены последовательности равны между собой. При длине  $m + n - 2$  и менее доказательство не проходит; можно доказать только совпадение некоторых членов, и соответственно, построить последовательность, в которой не все члены равны.

**Ответ.**  $m + n - 2$  (соответственно в задаче 13 ответ: 18).

**21. Подсказка.** Если длина слов равна  $k$ , то ответ:

$$n = 9k - 5(k - 1).$$

При  $k = 13$  это дает значение 57.

**Указание.** Эта задача распадается на две леммы.

**Лемма 1.** *Если произвольно менять  $A$ , то существует 57 слов длины 13, состоящих из первых цифр чисел  $A, 2A, 2^2A, \dots, 2^{12}A$ .*

**Лемма 2.** *Число  $2^n$  может начинаться с произвольной комбинации цифр.*

Вторая лемма есть старая и известная задача.

Докажем первую лемму. Пусть  $A = 0, a_1a_2 \dots \cdot 10^k$ ; нас интересует только набор цифр  $\{a_i\}$ , который дает числа от 0,1 до 0,999...; назовем его мантиссой  $A$ . «Слово» изменяется либо в тот момент, когда мантисса  $A$  «переползает» через числа 0,2; 0,3 и т. д., либо когда через них «переползает» мантисса числа  $2A, 4A$  и т. д. Поскольку цифр 9, всего для слов длины  $k$  число «переползаний» составит  $9k$  (первое слагаемое формулы). Однако если для  $A$  надо учитывать все 9 случаев, то для чисел  $2A, 4A$  и т. д. — только «переползания» через нечетные цифры, притом — не равные 1 (почему?). Отсюда и получается приведенный ответ.

**23. Решение.** Одну 20- и одну 10-копеечную монету можно заменить на две 15-копеечных, не меняя смысл задачи, и делать так до тех пор, пока не исчерпаются либо те, либо другие. Но тридцать 15-копеечных монет составили бы всего лишь 4 руб. 50 коп. Поэтому у кассира должно остаться еще десять 20-копеечных монет (почему?).

**24. Указание.** Пусть на прямой введены координаты и вначале кузнечики сидят в точках 0, 1, 2. Каждый прыжок делается на четное число, поэтому четность координаты каждого кузнечика не меняется.



**25. Указание.** Квадрат  $T_1$  получается из квадрата  $T_2$  растяжением в  $\sqrt{2}$  раз и поворотом на угол  $15^\circ$  (первое очевидно, а второе еще надо доказать).

**Ответ.** Все углы восьмиугольника равны  $135^\circ$ , а величины дуг —  $60^\circ$  и  $30^\circ$ .

**26. Решение.** Если в числе  $40\dots 09$  число нулей нечетно, то полным квадратом является число  $40\dots 00$ , и потому не является число  $40\dots 09$ .

Пусть число нулей четно. Поскольку последняя цифра числа — 9, то кандидатами на роль корня из этого числа могут быть только числа вида  $10n \pm 3$ . Примем, что  $n = 10^k \cdot l$ , где  $k \geq 0$ , и  $l$  кончается не нулем. При возведении в квадрат получим, очевидно,

$$100n^2 \pm 60n + 9 = 10^{2k+2}l^2 \pm 6l \cdot 10^{k+1} + 9.$$

Но тогда в числе  $(k+2)$ -я цифра справа отлична от 0, а общее число цифр не меньше  $2k+2$  (возможно, на одну цифру меньше, чем в числе  $10^{2k+2}$ , за счет вычитания  $6l \cdot 10^{k+1}$ ).

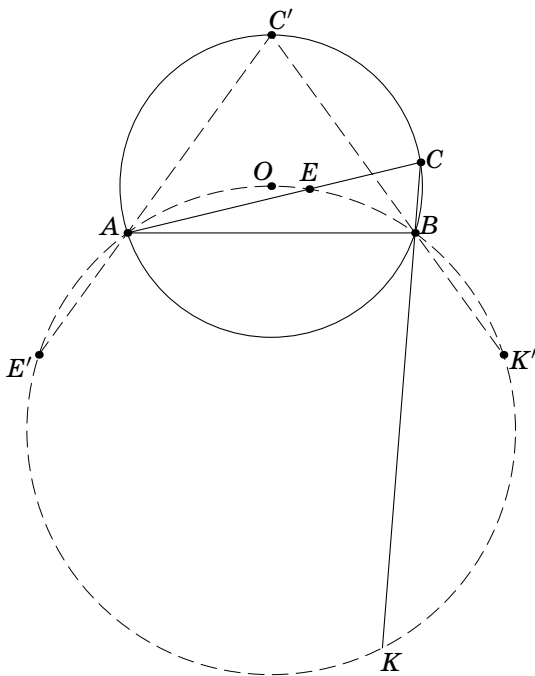
**27. Решение.** Всюду, кроме отрезка  $[a-0,1, a+0,1]$ , который имеет длину 0,2, первое слагаемое меньше 10. Аналогично для трех остальных слагаемых. Поскольку суммарная длина четырех «плохих» отрезков меньше 1, то существует точка, где каждое из четырех слагаемых меньше 10.

**28. Решение.** Будем считать сторону квадрата равной 1, один из углов квадрата примем за начало координат и направим координатные оси по сторонам квадрата. Тогда координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$  всегда будут целыми числами, а потому координаты вектора  $AA_1$  (кузнечик прыгает из точки  $A$  через кузнечика  $B$  в точку  $A_1$ ) — четными числами. Соответственно два кузнечика, сидящие на оси абсцисс, после любого числа прыжков будут находиться в точке с первой координатой  $2m$ , а два других — с координатой  $2n+1$ . То же самое, разумеется, относится к оси ординат.

Допустим, что три кузнечика оказались на одной прямой. Поскольку все 4 вершины равноправны, можно считать, что это кузнечики из вершин  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  и  $(1, 0)$ . Как сказано, обе координаты первого в любой момент четны, у второго —  $(2k, 2l+1)$ , у третьего —  $(2r+1, 2s)$ . Но тогда векторы, ведущие из точки, где сидит первый, в точки, где сидят второй и третий, имеют точно такой же вид (только числа  $k, l, r, s$  другие), а такие два вектора не могут быть коллинеарны.

**29. Решение.** Пусть  $C'$  — середина дуги  $ACB$ . Заменяем треугольник  $ABC$  на  $ABC'$  (при этом обе описанные окружности и точка  $O$  не меняются), и пусть  $E', K'$  — новые точки пересечения, соответствующие  $C'$ . Очевидно,  $OC' \perp E'K'$ .

Пусть теперь  $\angle COC' = \alpha$ , тогда угол между прямыми  $E'K'$  и  $EK$  тоже равен  $EAE' + KBK' = SAC' + CBC' = \alpha$ , следовательно,  $OC$  и  $EK$  тоже перпендикулярны.



**30.** См. решение задачи 26.

**31. Указание.** Можно считать, что у чисел  $a, b, c$  нет общего делителя. Рассмотрим по отдельности случаи, когда на некий простой делитель делится только одно из наших чисел (тогда ни одно из чисел  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$  и  $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$  не может быть целым), и когда на него делится ровно два числа —  $p$  входит, скажем, в числа  $a$  и  $b$  в степенях  $k, r$ . Приведение к общему знаменателю показывает, что если  $k \geq r > 0$ , то первая сумма не может быть целым числом; если же  $k < r$ , то нецелой является вторая сумма.

**32. Указание.** Вместо того, чтобы фиксировать отрезок и менять вершины (иными словами, поворачивать точку  $A_1$  на углы, кратные  $\pi/5$ ), можно поступить наоборот: считать вершиной всех углов точку  $A_1$ , а зато поворачивать отрезок  $PQ$  на те же углы. Мы получим девять отрезков  $P_iQ_i$ , причем всякий раз их концы совпадают:  $P_{i+1} = Q_i$ . Сверх того,  $P_2 = Q$ ,  $Q_{10} = P$ , так что сумма девяти углов равна  $\angle QA_1P = \angle A_{10}A_1A_2 = 4\pi/5$ .

**Ответ.** Эта сумма равна углу десятиугольника, или  $4\pi/5$ .

**33. Решение.** Пусть  $AK$ ,  $BL$  — эти отрезки. Возможны два случая:  $CK = CL$  и  $CK = AL$ . В первом случае очевидно, что точка  $P$  лежит на оси симметрии треугольника, т. е. на высоте  $CH$ . Во втором случае легко убедиться, что  $\angle APB = 120^\circ$ , откуда следует, что  $P$  лежит на соответствующей дуге окружности.

**Ответ.** Объединение  $CH$  и дуги  $AB$ .

**34. Указание.** Из условия следует, что

$$a + b + c + d = \frac{(a + c)(b + c)}{c}.$$

**Ответ.** Нет, не может.

**35. Идея решения.** Очевидно, порядок, в котором производятся разрезания, неважен.

Из данных четырех треугольников придется разрезать не менее трех. После этого получается две тройки одинаковых треугольников. В каждой из этих троек придется разрезать по два треугольника. Но после этого опять получаются 4 одинаковых треугольника!

Остается довести эту идею до четкого решения, используя тот факт, что если вообще можно сделать все треугольники разными, то это можно сделать за некое минимальное число операций  $n$ .

**36. Решение.** Да, возможно. Представим себе, что мы находимся в комнате; ее пол, потолок и стены как раз и образуют шесть довольно тонких параллелепипедов. Правда пока что они пересекаются и видны вершины, находящиеся в комнате. Чтобы это исправить, создадим узкие щели на месте стыков пола, стен и потолка, а главное, удлиним параллелепипеды — пол и потолок с севера на юг, две противоположные стены — с востока на запад и последние две — вверх и вниз. Из середины комнаты вершины не будут видны.

**37. Указание.** Каждое взвешивание делит банки на 3 группы:  
1) банки правой чашки,

- 2) банки левой и
- 3) банки, которые не взвешивали.

Если ограничиться тремя взвешиваниями, то найдутся две банки, которые при каждом взвешивании попадают в одну группу, следовательно, их нельзя будет различить.

Метод для четырех взвешиваний. Первым взвешиванием надо положить на левую чашку весов 27 самых тяжелых банок, а на правую — 26 самых легких (можно считать, что есть еще «нулевая 81-я банка»). При этом разность весов будет максимальной, и все банки разбиты на три группы: тяжелые, средние и легкие.

Для второго взвешивания на левую чашку кладется также 27 банок, а именно:

- 1) 9 самых тяжелых банок из числа тяжелых;
- 2) 9 самых тяжелых банок из числа средних;
- 3) 9 самых тяжелых банок из числа легких; на правую, аналогично, самые легкие банки каждой группы, и т. д.

**38. Решение.** Да, существует. Например, сфера

$$(x - \sqrt{5})^2 + (y - \sqrt{3})^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 10.$$

На ней лежит только точка  $(0, 0, 0)$ . (Доказать это проще всего, раскрыв скобки слева.)

**39. Решение.** Если  $n = 3k$ , то можно раскрасить верхнее основание в порядке цветов  $abcabc \dots$ , и легко убедиться, что такая раскраска продолжается на всю призму.

Если же  $n$  не делится на 3, то в каком-то месте верхнего основания неизбежна раскраска типа  $aba$  (три ребра окрашены в 2 цвета). Отсюда следует, что два соответствующих боковых ребра имеют цвет  $c$ ; нижнее ребро между ними имеет цвет  $a$ , и т. д. Определив таким образом шаг за шагом цвет каждого ребра, можно убедиться, что в итоге мы приходим к противоречию и требуемой раскраски не существует.

**Ответ.**  $n = 3k$ .

**Замечание.** Если  $n$  четно (и не делится на 3), то существует, по крайней мере, раскраска, при которой в каждой вершине сходятся три цвета и все боковые грани имеют стороны всех трех цветов, то есть условие задачи выполнено для боковых граней, но нарушается на основаниях. Если же  $n$  нечетно и не делится на 3, то даже и такая раскраска не существует.

**40. Указание.** Пусть  $K$  — точка пересечения диагонали  $AC$  с окружностью, построенной на  $AB$ , и  $L$ , соответственно, — точка

пересечения диагонали  $BD$  с окружностью, построенной на  $CD$ . Докажите вначале, что оба четырехугольника  $BCLK$  и  $ADLK$  — вписанные, а затем примените теорему о касательной и секущей.

**41. Решение.** Зафиксируем некоторое целое  $R$ , которое мы выберем позже, и возьмем квадрат со стороной  $M \gg R$ . В этом квадрате лежит приблизительно  $M^2$  целых точек, и приблизительно столько же окружностей радиуса  $R$  с центром в целой точке (требуются некоторые оговорки в отношении окружностей, близких к границе, но так как  $M$  много больше  $R$ , это не влияет на дальнейшие оценки).

Установим соответствие «отмеченная точка — центр круга» для всех пар, лежащих на расстоянии  $R$ . По условию, каждому центру круга соответствует не более 3 точек, тогда как каждой точке соответствует столько центров, сколько решений имеет пифагорово уравнение  $x^2 + y^2 = R^2$ . Остается выбрать  $R$  таким образом, чтобы это уравнение имело достаточно много решений (докажите сами, что это возможно). Тогда окажется, что доля отмеченных точек внутри квадрата будет сколь угодно мала, в частности, меньше 10 000 000. Разделим квадрат на «маленькие» квадраты со стороной 1995; в одном из этих квадратов, а следовательно, и во вписанном в него круге, не будет ни одной отмеченной точки.

**42. Решение.** а) Годится, например, такое разбиение:

$$[0, 1] = \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right],$$

причем белыми являются первый и четвертый участки.

В самом деле, требуется доказать, что

$$P\left(\frac{1}{4}\right) - P(0) + P(1) - P\left(\frac{3}{4}\right) = P\left(\frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{4}\right) + P\left(\frac{3}{4}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right).$$

Но так как степень  $P(x)$  не выше 2, то разность

$$Q(x) = P(x) - P\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

есть многочлен степени не выше 1. Нам требуется доказать, что

$$Q\left(\frac{1}{4}\right) + Q(1) = Q\left(\frac{1}{2}\right) + Q\left(\frac{3}{4}\right), \quad \text{или} \quad Q(1) - Q\left(\frac{3}{4}\right) = Q\left(\frac{1}{2}\right) - Q\left(\frac{1}{4}\right).$$

Рассмотрев теперь многочлен

$$S(x) = Q(x) - Q\left(x - \frac{1}{4}\right),$$

мы видим, что осталось доказать равенство  $S(1) = S\left(\frac{1}{2}\right)$ . Это очевидно, поскольку  $S(x)$  — многочлен нулевой степени.

б) Это возможно, и следует применить аналогичную процедуру, шаг за шагом понижая степень многочлена (в разборе пункта а) было сделано первые 2 шага). Очевидно, понадобится разбить весь отрезок  $[0, 1]$  на  $2^{1995}$  маленьких отрезков.

**43. Указание.** Воспользуйтесь конструкцией, предложенной в решении задачи 36, слегка изменив ее так, чтобы вместо 6 параллелепипедов получился один невыпуклый многогранник.

**Ответ.** Да, существует.

**44. Решение.** Примем за исходную точку старую известную задачу: если имеется группа  $N$  из нечетного числа людей, то в ней есть человек, у которого четное число знакомых.

Пусть  $A$  — один из наших 50 человек,  $N$  — группа людей, знакомых с ним. Для любого  $B \in N$  его общие знакомые с  $A$  — это в точности люди из  $N$ , знакомые с  $B$ . Если в  $N$  нечетное число людей, то найдется  $B$ , у которого четное число знакомых в  $N$ , и тогда  $(A, B)$  — искомая пара.

Остается рассмотреть случай, когда у каждого из наших 50 человек четное число знакомых. Тогда в группе  $M$  незнакомых с  $A$  — нечетное число людей, и поэтому в  $M$  найдется некто  $C$ , у которого четное число знакомых в  $M$ . Поскольку, по предположению,  $C$  незнаком с  $A$ , и притом у него четное число знакомых, следовательно, у него четное число знакомых в  $N$ . Поэтому  $(C, A)$  — искомая пара.

**Замечание.** Можно привести пример, когда такая пара единственна. А именно, пусть 49 человек все знакомы между собой (следовательно, у каждых двоих 47 общих знакомых), а последний,  $A$ , знаком только с  $B$ . Тогда пара  $(A, B)$  — единственная, удовлетворяющая условию (у них 0 общих знакомых).

## XVII Турнир городов (1995/96)

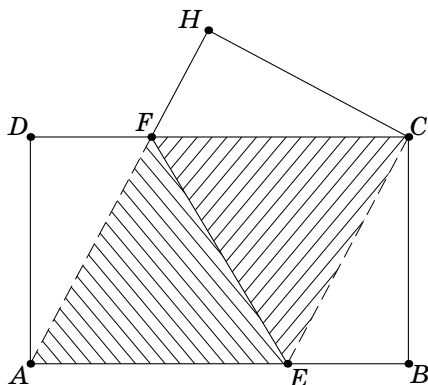
**1. Указание.** В качестве первой прямой надо взять диагональ квадрата.

**Ответ.** Три.

**2. Указание.** Возьмите подходящий набор дробей вида  $1/k$ , сумма которых равна 1, и умножьте их на их общий знаменатель.

**Ответ.** Да, существуют.

**3. Решение.** Пусть  $BCHFE$  — полученный пятиугольник, точки  $E, F$  лежат на сторонах  $AB$  и  $CD$ . Тогда треугольник  $CEF$  покрыт бумагой дважды, тогда как остальная часть — только единожды; соответственно разность площадей равна площади этого треугольника. Его высота равна стороне  $AD$ , а основание больше половины  $AB$ . Поэтому его площадь больше  $1/4$ , что и требуется.



**4. Указание.** Поскольку биссектрисы внешнего и внутреннего угла перпендикулярны друг другу, треугольник  $AMN$  — прямоугольный. В таком треугольнике отрезок  $AK$  является медианой тогда и только тогда, когда треугольник  $AMK$  — равнобедренный (и в этом случае треугольник  $ANK$  тоже автоматически будет равнобедренным). Поэтому достаточно доказать равенство углов  $KMA$  и  $KAM$ , которое следует из подсчета дуг, на которые они опираются: оба равны четверти дуги  $BC$  плюс половине дуги  $AB$ .

**6. Ответ.** а) Да, существуют. Например, 1, 3, 7, 9 (суммы: 11, 13, 17, 19). Более того: оказывается, можно подобрать 4 простых числа так, чтобы все суммы по три были простыми. Можно, например, взять числа 7, 13, 17, 23 (суммы — 37, 43, 47, 53).

б) Нет. Достаточно заметить, что из 5 чисел всегда можно выбрать три, сумма которых делится на 3.

7. **Указание.** Между числами 500 000 000 000 и 1 000 000 000 000 не найдется 500 000 полных квадратов (а всего лишь около 300 000).

**Ответ.** Нет.

8. **Решение.** Предположим, что искомая прямая (обозначим ее  $r$ ) лежит внутри угла  $ACB$ . Пусть  $l$  — биссектриса этого угла, углы между  $l$  и  $CA$ ,  $CB$  оба равны  $\gamma$ , угол между  $l$  и  $r$  равен  $\alpha$ . Тогда произведение расстояний равно

$$CA \cdot \sin(\gamma - \alpha) \cdot CB \cdot \sin(\gamma + \alpha) = CA \cdot CB \cdot \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\gamma}{2}$$

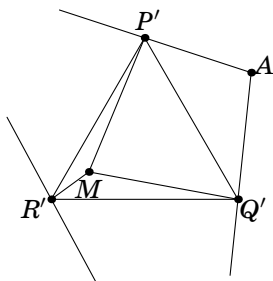
и максимально, если максимален  $\cos 2\alpha$ , откуда  $\alpha = 0$ .

Второй случай — когда точки  $B$ ,  $C$  лежат по одну сторону от прямой  $r$  — аналогичен.

**Ответ.** Искомая прямая — либо биссектриса угла  $ACB$ , либо биссектриса дополнительного угла, в зависимости от того, какой из них больше. Если они равны (т.е. оба — прямые), то годятся обе прямые. В этом, и только в этом случае решение не единственно.

9. **Решение.** Наиболее идейное решение, пожалуй, таково. Раскрасим треугольник  $ABC$  в три цвета. Точка  $M$  закрашивается красным, если отрезок  $PQ$  является наименьшим из трех (т.е.  $PQ \leq PR$ ,  $PQ \leq QR$ ; заметим, что при этом некоторая окрестность точки  $A$  целиком закрашивается в красный цвет); закрашивается зеленым, если наименьшим является  $PR$ , и желтым — если наименьшим является  $QR$ . Точка, в которой сходятся все три области — искомая.

Однако «дотянуть» это решение до строгого — технически непростая задача. Поэтому приведем второе, конструктивное решение.





Построим равносторонний треугольник  $P'Q'R'$  и найдем внутри него такую точку  $M$ , чтобы углы  $P'MQ'$ ,  $P'MR'$  и  $Q'MR'$  дополнились до  $180^\circ$  углы треугольника  $ABC$ :

$$\angle P'MQ' = 180^\circ - \angle BAC, \quad \text{и т. д.}$$

Восставим из точек  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$  перпендикуляры к отрезкам  $MP'$ ,  $MQ'$  и  $MR'$ . Мы утверждаем, что треугольник, образованный этими перпендикулярами, подобен треугольнику  $ABC$ . Остальное очевидно.

**10. Указание.** На первом шаге разность между произведением и суммой квадратов равна  $120 - 55 = 65$ , а на каждом следующем шаге она уменьшается на 1.

**11. Указание.** Докажите сначала, что точки  $P$ ,  $Q$  лежат на окружностях, описанных соответственно вокруг треугольников  $AKB$ ,  $AKC$ . Отсюда легко выводятся равенства

$$\angle PAK = \frac{1}{2}\angle B, \quad \angle KAQ = \frac{1}{2}\angle C,$$

которые в сумме и дают нужный результат.

**12. а) Решение.** Журналист выбирает любых двух человек  $A$ ,  $B$  и задает  $A$  вопрос: «Знаете ли вы  $B$ ?». В зависимости от ответа («да» или «нет») журналист убеждается в том, что либо  $A$ , либо  $B$  — не тот, кого он ищет. Итак, за 1 вопрос всегда можно отбросить одного человека. Поэтому  $N - 1$  вопроса достаточно.

**б) Указание.** Приведенный алгоритм нельзя улучшить, т. к. если в графе  $N$  вершин и меньше, чем  $N - 1$  ребер, то граф несвязен.

**Ответ. а)** Да. **б)**  $N - 1$ .

**13. Решение.** В качестве вершин семиугольников можно, например, взять три вершины правильного треугольника  $ABC$ , его центр  $O$  и три вершины  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  треугольника, полученного из  $ABC$  поворотом на  $1^\circ$  и гомотетией с коэффициентом  $1/2$ . Семиугольники постройте сами.

**Ответ.** Да, существуют.

**14. Решение. а)** Стратегия первого такова. Сначала он расставляет одну за другой 12 групп по 8 фишек, разделенных одним пробелом (если второй своим ходом уничтожает одну из групп, то первый ее восстанавливает, а затем строит еще одну группу). Затем он объединяет пары групп на концах и получает следующий набор групп: 17, 8, 8, ..., 8, 17 (восемь восьмерок и две по 17, всюду разделенные одним пробелом; всего на доске 98

фишек). После этого, какой бы ход ни сделал второй, первый может очередным ходом выставить все фишки в ряд без пробелов.

б) Предложенная конструкция неулучшаема, и 98 есть ответ на второй вопрос.

**15. Ответ.** Единственная подходящая точка — точка  $P$ , равно отстоящая от  $A$  и  $C$ , а также от  $B$  и  $D$  (т.е. лежащая на пересечении серединных перпендикуляров к диагоналям).

**16. Указание.** Из условия сразу следует, что разность между любыми двумя числами есть целое четное число. Далее остается рассмотреть и исключить три случая:

- а) все числа целые и четные,
- б) все числа целые и нечетные,
- в) все числа рациональны с одним и тем же знаменателем.

Первые два почти очевидны. В третьем надо лишь убедиться, что знаменатель произведения больше, чем знаменатель каждого из сомножителей.

**17. Решение.** Вершины треугольников не могут лежать внутри прямоугольника (а только на сторонах). Для доказательства надо рассмотреть самый маленький треугольник, вершина которого лежит внутри; к ней прилежит его катет, а следовательно, гипотенуза другого треугольника, который, стало быть, еще меньше — противоречие. (Вообще прямой угол самого маленького из треугольников разбиения обязан совпадать с углом прямоугольника.)

Отсюда легко следует, что у наибольшего треугольника гипотенуза лежит на одной из сторон, а вершина — на другой, параллельной ей. Остается воспользоваться тем, что отношение гипотенузы треугольника к высоте не меньше 2.

**18. Указание.** Достаточно доказать, что ситуация не меняется, если изменить порядок выхода на трассу двух человек. Более точно: предположим, что  $k$ -м и  $(k+1)$ -м по счету выходят зрители  $A$ ,  $B$ , причем в результате они займут места №  $r, s$  и издадут  $N$  «охов». Докажите, что если они выходят в обратном порядке — сначала  $B$ , потом  $A$ , — то они займут те же два места  $r, s$  (хотя, возможно, не в том порядке) и издадут столько же «охов».

**19. Указание.** Искомая точка  $C$  (независимо от выбора двух троек) расположена на одной прямой с центром круга  $O$  и центром тяжести всех шести точек  $K$ , причем  $O$  делит отрезок  $CK$  в отношении  $2:1$ .

**Ответ.** Один раз.

**20. Ответ.** а), б) Существует, в) не существует.

**Решение.** а) В качестве первого члена прогрессии  $a_0$  возьмем 20-значное число

$$11\ 121\ 314\ 151\ 617\ 181\ 920$$

(порядк выписано 10 двузначных чисел от 11 до 20), а в качестве разности  $d$  — 19-значное число 10101...01. Легко убедиться, что при добавлении  $d$  в количестве от 1 до 10 (и даже более) происходит циклическая перестановка пар цифр и, сверх того, первое двузначное число не просто переходит на последнее место, но к нему еще прибавляется 10 (т.е. сумма цифр возрастает на 1). Таким образом, даже не 11, а 80 первых членов этой прогрессии удовлетворяют требованию.

б) Модифицируем конструкцию из пункта а) и выпишем подряд не 10 двузначных чисел, а 10 000 5-значных чисел (таким образом, первый член прогрессии будет иметь 50 000 цифр и иметь вид 1000110002...20000). Соответственно,  $d$  зададим в виде

$$d = 10000100001 \dots 100001.$$

Точно так же, как в случае а), при добавлении  $d$  будет происходить циклическая перестановка пятерок цифр, с добавлением одной единицы.

**в) Указание.** Последовательность сумм цифр членов арифметической прогрессии растет как логарифм, т.е. медленнее, чем арифметическая прогрессия.

*Другое доказательство.* Рассмотрим числа

$$a_0, \ a_0 + d \cdot 10^n, \ a_0 + d \cdot 10^m$$

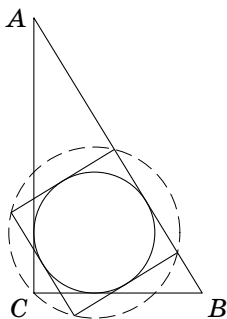
для достаточно больших  $n, m$  (так, чтобы цифры «не налезали» друг на друга). У второго и третьего чисел сумма цифр совпадают.

**21. Решение.** Если  $\alpha$  — наименьший угол, то  $\alpha < 18^\circ$ , поскольку треугольник остроугольный. С другой стороны,  $11\alpha > 180^\circ$ ,  $\alpha > 16^\circ$ . Итак,  $\alpha = 17^\circ$ , откуда другие углы равны  $85^\circ$  и  $78^\circ$ .

**22. Ответ.** а) Да. Например, числа 5, 101, 197.

б) Нет, так как одно из этих чисел делится на 3, а числа 1999, 3, 3995 не годятся.

**23. Указание.** Если описать вокруг вписанной окружности квадрат, а затем вокруг этого квадрата, в свою очередь, описать окружность (ее радиус в  $\sqrt{2}$  раз больше радиуса вписанной), то



она пройдет через точку  $C$ . Квадрат же можно расположить так, что одна из его сторон — указанная проекция.

**Ответ.**  $45^\circ$ .

**24. Решение.** Сосчитаем возможное число точек самопересечения на каждом звене ломаной (общее число точек самопересечения будет равно половине этой суммы). Звенья делятся на «короткие» (все остальные вершины лежат по одну сторону от звена), «средние» (с одной стороны лежит одна точка, с другой три) и «длинные». На «коротком» звене точек самопересечения быть не может, а на «среднем» может быть только 2 точки, поэтому число  $N$  точек самопересечения не превышает  $(3r + 2s)/2$ , где  $r$  — число длинных ребер,  $s$  — число средних. Учитывая очевидные неравенства  $r \leq 3$ ,  $s \leq 6 - r$ , мы видим, что  $N \leq 6 + r/2 \leq 7,5$ . Таким образом, больше семи точек быть не может. С другой стороны, если точки расположены в порядке:  $A, B, C, D, E, F$ , то ломаная  $ADFBE C$  имеет 7 точек самопересечения.

**Ответ.** 7.

**25. Решение.** В этой игре оба имеют беспроеигрышную стратегию (и, следовательно, ни один не имеет выигрышной). Второму достаточно придерживаться симметрии — например, относительно центра доски (можно также придерживаться симметрии относительно горизонтальной или вертикальной средней линии). Стратегия первого чуть сложнее. Он делает первый ход произвольно, затем играет по стратегии второго, т. е. делает ходы симметрично ему, если это возможно. Если же это невозможно, это означает, что позиция симметрична, и тогда первый опять делает произвольный ход. Убедитесь сами, что эта стратегия обеспечивает первою ничью.



ляется касательной к первой окружности, поэтому треугольник  $B_1E_1A_1$  — равнобедренный. Перпендикуляр  $CD$ , о котором идет речь в условии, параллелен  $B_1E_1$ , поэтому  $\triangle CDA_1 \approx \triangle B_1E_1A_1$ , и тоже равнобедренный,  $CD = DA_1$ . Аналогично  $CD = DA_2$ , что и требовалось (см. рисунок).

**33. Решение.** Выпишем все суммы элементов от первого до  $k$ -го:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad S_{1996} = a_1 + a_2 + \dots + a_{1996}.$$

Рассмотрим их дробные части. Поскольку эти дробные части — 1996 чисел на отрезке  $[0, 1]$ , среди них есть две, отличающиеся меньше, чем на 0,001:  $|S_k - S_r| < 0,001$ . Тогда сумма

$$S = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_r$$

удовлетворяет требованию задачи.

**34. Указание.** Надо каждый раз делать «максимальный ход», например, на первом ходу — в другой угол, притом в тот, который дальше (если доска квадратная, то в любой).

**Ответ.** Выигрывает первый.

**35. а)** Сосчитаем число троек «задача — двое, не решивших ее». Если данную задачу решило пятеро, то ее не решило трое, и для этой задачи имеется три таких тройки, а всего, стало быть, их 24. Но из 8 учеников можно образовать 28 пар, следовательно, одна из этих пар не входит ни в одну из указанных троек, а это и означает, что эти двое решили все задачи.

**б)** Здесь достаточно построить контрпример. Пусть, например,

|                      |                              |
|----------------------|------------------------------|
| первую задачу решили | 1-й, 2-й, 3-й и 4-й ученики, |
| вторую —             | 5-й, 6-й, 7-й и 8-й,         |
| третью —             | 1-й, 2-й, 5-й и 6-й,         |
| четвертую —          | 3-й, 4-й, 7-й и 8-й,         |
| пятую —              | 1-й, 3-й, 5-й и 7-й          |
| .....                | .....                        |

Закончите конструкцию сами. (Указание. Уже для этих 5 задач, если взять, например, первого ученика, то парой ему может служить только 7-й или 8-й; парой второму может служить только 7-й и т. д.)

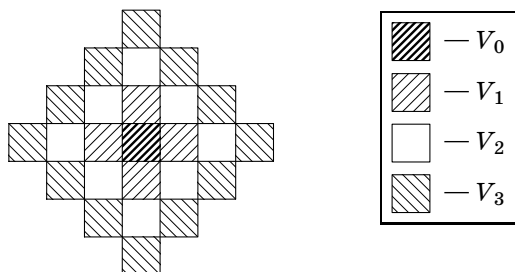
**36.** См. решение задачи 39.

**37. Указание.** Проекция трех его взаимно перпендикулярных ребер на ось, перпендикулярную плоскости, должны равняться 1, 2 и 4.

**Ответ.** Да, существует.

**38. Указание.** Разобьем всю доску на единичные квадраты; кузнечик сидит в одном из этих квадратов (не на стороне, поскольку его координаты нецелые).

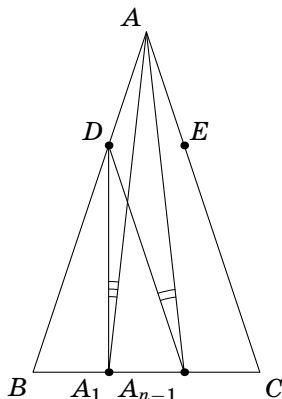
Обозначим через  $V_0$  исходный квадрат  $0 \leq x, y \leq 1$  и разобьем множество всех квадратов на подмножества  $V_0, V_1, V_2, \dots, V_s, \dots$ , как показано на рисунке. Докажите, что если начальный квадрат, в котором сидит кузнечик, входит в  $V_s$ , то и после любого прыжка кузнечик останется внутри множества  $V_s$ .



**39. Указание.** Выберем на  $AC$  точку  $E$ , симметричную  $D$ , тогда  $DE \parallel BC$  и  $AE = AD = AB/n$ . Докажите для начала, что

$$\angle DA_1A + \angle DA_{n-1}A = \angle DA_1E = \angle BDA_1.$$

**Ответ.**  $\alpha/2$ .



**40. Ответ.** Возможно.

**Замечание.** Еще одна задача на конструирование «неправдоподобного» примера.

**41. Решение.** а) Квадрат любого числа при делении на 16 дает остаток 0, 1, 4 или 9. Отсюда легко следует, что числа вида  $16k + 12$ ,  $16k + 14$  не могут быть представлены как сумма двух квадратов. Поэтому любое  $n$  вида  $(8r + 5)^2 + (8s + 6)^2 = 16m + 13$  удовлетворяет условию.

б) Справедливо тождество:

$$x^2 + x^2 + 2 = (x + 1)^2 + (x - 1)^2.$$

Отсюда следует, что достаточно представить в виде суммы двух квадратов неограниченное количество чисел вида  $n = 2x^2 + 1$ . Это можно сделать разными способами. В частности, бесконечно много чисел такого вида являются квадратами (например,  $3^2 = 2 \cdot 2^2 + 1$ ,  $17^2 = 2 \cdot 12^2 + 1$ ), и хотя формально этот способ не подходит (второй квадрат равен 0, т. е. не является натуральным), тем не менее отсюда достаточно ясно, что подобрать такие  $n$  нетрудно.

**42. Решение.** Очевидно, достаточно разобрать пункт б). Предположим сначала, что  $n = 3$ . Рассмотрим исходную таблицу и сопоставим каждой строке набор из трех чисел, заменив единицы нулями, и минус единицы — единицами: например,  $(-1, 1, -1) \rightarrow (1, 0, 1)$ . Тогда каждой строке сопоставлена вершина единичного куба, при этом тройка чисел этой строки — это координаты вектора-диагонали куба, ведущей из данной вершины в противоположную.

Заменим теперь, согласно условию, часть чисел нулями. Это значит, что диагональ куба заменена другим вектором; но этот вектор, очевидно, тоже ведет из данной вершины куба в другую, хотя уже не противоположную (можно сказать, что теперь это — не диагональ куба, а диагональ его грани). Таким образом, мы имеем набор вершин куба, причем из каждой вершины ведет путь в какую-то другую вершину. Соответственно, идти вдоль такого пути можно бесконечно, а это значит, что рано или поздно мы вернемся в вершину, где уже были. Это как раз и означает, что сумма соответствующих строк равна 0.

Общий случай совершенно аналогичен, только надо обычный куб заменить  $n$ -мерным.

Трудная и красивая задача.



## XVIII Турнир городов (1996/97)

**1. Ответ.** Можно.

**Замечание.** Составив соответствующее квадратное уравнение, мы получим также посторонний корень, которому соответствует тривиальное, но постороннее решение:

$$(-9)^2 + (-8)^2 + \dots + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + \dots + 9^2.$$

**2. Ответ.** При  $n$ , кратном трем. (Треугольник со стороной  $3n$  можно разбить на несколько треугольников со стороной 3, а этот треугольник легко разбивается на три трапеции.)

**3. Указание.** Сравните с решением задачи 8.

**4. Указание.** Если центр окружности совпадает с центром ромба, то утверждение очевидно. Чтобы свести общий случай к этому, докажите, что разность между суммой красных и суммой синих отрезков не меняется, если центр окружности сдвигается параллельно одной из сторон ромба.

**5. Указание.** Примем вершину куба, не лежащую на этих ребрах, за начало координат, а ребра — за оси. Условия равноудаленности примут вид:

$$x^2 + (1 - y)^2 = y^2 + (1 - z)^2 = z^2 + (1 - x)^2.$$

Отсюда следует ответ.

**Ответ.** Точки, для которых  $x = y = z$ , или, иными словами, диагональ куба, не проходящая через шесть вершин, принадлежащих этим ребрам.

**6. Решение.** Проведем произвольные разрезы и подсчитаем у всех полученных кусков длину «выпуклых» дуг (таких, что выпуклость смотрит внутрь куска) и общую длину «вогнутых» дуг. Вначале имеется выпуклая дуга (сама окружность), и нет вогнутых, так что суммарная длина выпуклых больше. При разрезании и дальнейшем складывании возникают или взаимно уничтожаются куски одинаковой длины. Отсюда сразу следует, что квадрат, у которого нет ни тех, ни других, т. е. суммарная длина одна и та же, получить невозможно.

**Ответ.** Нет, нельзя.

**7. Указание.** Если провести две параллельные прямые, пересекающие параболу, и найти середины  $A$ ,  $B$  полученных хорд, то прямая  $AB$  параллельна оси параболы.

**8. Решение.** Допустим, что это так. Тогда неизбежно одна девочка не знакома ни с одним мальчиком, еще одна — ровно

с одним, и т. д., до последней, которая знакома со всеми. Всего, таким образом, имеется  $n(n+1)/2$  знакомств, и каждый мальчик знаком ровно с половиной девочек. Следовательно,  $n$  должно быть нечетным. В этом случае нетрудно построить пример. А именно, поставим в пару двух девочек: ту, которая должна быть знакома с  $r$  мальчиками, и ту, которая должна быть знакома с  $n-r$ . Познакомим их с мальчиками так, чтобы каждый мальчик был знаком либо с той, либо с другой, но не с обеими одновременно. Прделаав это произвольным образом для всех  $r$ ,  $0 \leq r \leq (n+1)/2$ , мы получим нужную систему знакомств.

**9. Решение.** Наиболее изящный способ: нарисовать на плоскости проекцию куба (его вершины — 8 точек) и закрасить в красный цвет три точки верхней крышки куба и одну — нижней, остальные вершины закрасить черным цветом.

**Ответ.** Можно.

**10. Решение.** Пусть  $p$  — наименьшее из трех простых чисел. Если  $p > 2$ , то

$$q \geq p+2, \quad r \geq p+4, \quad qr \geq p^2 + 6p + 8 > p^2 + 11.$$

Если же  $p = 2$ , то  $p^2 + 10 = 14$ , а  $p^2 + 11 = 15$ .

**Ответ.** а) Не существует. б) {2, 3, 5}. Других решений нет.

**11.** См. решение задачи 16 а).

**12. Решение.** а) Поскольку гипотенуза есть целое число, сторона квадрата, выложенная катетами и гипотенузами — тоже целое. Поскольку площадь треугольника равна 6, эта сторона есть число четное. Но тогда площадь квадрата делится на 4, и частное от ее деления на 6 четно.

б) Очевидно, стороны прямоугольника равны  $a + b\sqrt{5}$ ,  $c + d\sqrt{5}$ , числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  — целые неотрицательные. (На самом деле из того, что площадь прямоугольника есть целое число, следует, что два из этих четырех чисел равны нулю; но мы этим не будем пользоваться.) Длина произвольного отрезка внутри квадрата, по которым граничат треугольники, как нетрудно видеть, тоже имеет вид  $m + n\sqrt{5}$ . Поэтому суммарная длина всех отрезков внутри квадрата имеет такой же вид:  $L = M + N\sqrt{5}$ , где  $M$ ,  $N$  — целые, и суммарный периметр всех треугольников равен

$$2(a + c + b\sqrt{5} + d\sqrt{5} + M + N\sqrt{5})$$

(периметр прямоугольника плюс удвоенная длина разрезов). С другой стороны, если треугольников  $k$ , то их суммарный периметр равен  $k(3 + \sqrt{5})$ . Отсюда следует, что  $k$  четно.

**13. Решение.** Да, существует. Например, таково число

$$A = 1\,000\,000 - 111\,111 = 888\,889.$$

**14. Решение. а)** Заметим сначала, что если попросту заполнить 6 карточек так: первую — 1, 2, 3, 4, 5, 6, вторую — с 7 по 12 и т.д., то для того чтобы выигрышной не нашлось, требуется, чтобы было по одной проигрышной среди первых шести, среди вторых шести и т.д.

Заполним теперь первые три карточки так:

(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6;

(2) 1, 2, 3, 7, 8, 9,

(3) 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Для того чтобы все они оказались проигрышными, необходимо, чтобы среди первой девятки оказалась не одна, а две проигрышных клеточки. Точно тем же способом заполним следующие три карточки (4)—(6) числами от 10 до 18; тогда среди чисел 10, ... ..., 18 тоже должно быть два проигрышных. Остальные три карточки можно попросту заполнить разными цифрами:

(7) — от 19 до 24,

(8) — от 25 до 30 и

(9) — от 31 до 36.

**б)** Пусть 8 карточек заполнены произвольным образом. Докажем, что можно выбрать 6 чисел так, чтобы «испортить» все 8 карточек.

Если есть число, отмеченное на трех карточках, то достаточно взять это число и еще по одному числу с каждой из остальных карточек.

Предположим, что каждое число отмечено не более чем на двух карточках; таким образом, не менее 12 чисел отмечены дважды. Пусть  $A$  — любое из них; на соответствующих двух карточках отмечено, кроме  $A$ , не более 10 разных чисел, следовательно, есть еще одно число  $B$ , отмеченное на двух других карточках. Таким образом, выбрав числа  $A$ ,  $B$  и еще по одному числу с оставшихся 4 карточек, мы опять «испортим» все 8 карточек.

Решение задач в), г) полностью аналогично.

**15. Ответ.** Можно.

Способ указан в решении задачи 9.

**16. а) Решение.** Достаточно заметить, что общий член написанного ряда (ясно, что в действительности следует рассматривать не конечную сумму, а ряд и его частные суммы) равен

$$\frac{m^2 - 2}{m!} = \frac{m(m-1) + m - 2}{m!} = \frac{1}{(m-2)!} + \frac{1}{(m-1)!} - \frac{2}{m!}.$$

Приводя подобные члены, мы видим, что его частная сумма равна

$$3 - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}, \quad (*)$$

и требуемый результат очевиден. Сумма всего ряда, таким образом, равна 3.

**б) Указание.** Аналогично пункту а), следует представить куб числа в виде

$$m^3 = m(m-1)(m-2) + xm(m-1) + ym.$$

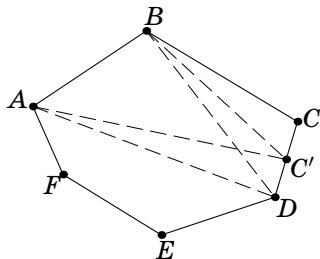
Прямая проверка показывает, что  $x=3$ ,  $y=1$ . Затем нужно подобрать число  $a$  с таким расчетом, чтобы все члены, кроме конечного (и небольшого) числа, взаимно сокращались; легко сообразить, что

$$a = 1 + x + y.$$

После этого вся частная сумма, при любом числе членов, может быть представлена в виде, аналогичном (\*), откуда находим  $b$  и  $c$ .

**Ответ.**  $a=5$ ,  $b=9$ ,  $c=4$ .

**17. Указание.** Шестиугольник  $ABCDEF$  можно несколькими способами составить из треугольников с вершинами в его вершинах. Затем надо использовать тот факт, что площадь, например, треугольника  $ABC'$  есть среднее арифметическое площадей  $ABC$  и  $ABD$  (и аналогично для остальных треугольников).



**Ответ.** Если  $S$  — сумма площадей, указанных в условии, то площадь шестиугольника равна  $2S/3$ .

**18. Решение.** Для произвольных функций  $g(x)$ ,  $h(x)$  обозначим через  $g \circ h$  функцию  $H(x) = g(h(x))$ . Вообще говоря (и даже чаще всего) неверно, что  $g \circ h = h \circ g$ . Если это свойство все же выполняется, то функции называются коммутирующими. Данная задача — на свойства «коммутирующих многочленов». Типичный прием в таких случаях — рассмотрение «неподвижных точек», т.е. решений уравнений вида  $g(x) = x$ .

Положим  $Q(x) = P(P(x))$ . Легко убедиться в том, что  $Q(x)$  — многочлен 4-й степени, что уравнение  $Q(x) = x$  имеет 4 корня, из которых два совпадают с корнями  $x_1, x_2$  уравнения  $P(x) = x$ , а два другие корня  $x_3, x_4$  удовлетворяют соотношениям  $P(x_3) = x_4$ , и  $P(x_4) = x_3$ . (Замечание. Эти факты можно установить либо из общих соображений, либо непосредственным рассмотрением многочлена  $x^2 - 1996$ . Вообще утверждение задачи опирается только на указанные свойства  $P(x)$ , и потому верно для широкого класса многочленов второй степени.)

Предположим, что функция  $f(x)$  существует. Очевидно, все три функции  $f$ ,  $P$  и  $Q$  попарно коммутируют. Для решения задачи достаточно рассмотреть число  $y = f(x_3)$ . Поскольку  $f$  коммутирует с  $Q$ ,  $y$  является корнем уравнения  $Q(x) = x$ , т.е. совпадает с одним из чисел  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Допустим, например, что  $y = x_3$ . Тогда и

$$P(x_3) = f(f(x_3)) = x_3,$$

а это неверно. Аналогичным образом легко убедиться, что  $y$  не может совпадать с  $x_1, x_2, x_4$ . Это и есть требуемое противоречие.

**19. Решение. а)** Пути из 1 в 3 и из 2 в 4 непременно пересекаются. Поэтому каждой паре таких путей можно сопоставить пару путей из 1 в 4 и из 2 в 3 по принципу: «идем из 1 вначале по дороге в 4, а на первом перекрестке переходим на путь, ведущий в 3». Так как обратное не всегда возможно, получаем неравенство.

**б)** Рассуждение аналогично. Для любой тройки путей, ведущих из 1 в 6, из 2 в 4 и из 3 в 5 (первое слагаемое правой части) какие-то два пересекаются; то же верно для второго и третьего слагаемого правой части. Разница с пунктом а) в том, что здесь нужно по отдельности рассматривать два случая:

1) первая точка пересечения пути, выходящего из 2 — с путем, выходящим из 1;

2) первая точка пересечения пути, выходящего из 2 — с путем, выходящим из 3.

**21. Указание.** Первые три цифры могут быть произвольными, и тогда для четвертой цифры всегда имеется 2 варианта (в том



этого куба известным приемом «срезания» с куба четырех вершин с прилегающими треугольными пирамидами.

**Ответ.**  $\pi/2$ .

**30. Решение.** Первому достаточно расставить побольше красных точек «общего положения»: если поставлено  $N$  красных точек, то имеется порядка  $N^2$  мест для третьей точки, и второй не может «закрыть» все эти места. (На самом деле достаточно расставить, скажем, 25 красных точек «общего положения».)

**Ответ.** Нет, не может.

**31. Решение.** Допустим, что  $b < a$ , тогда оказалось бы, что

$$c > 2a > a + b,$$

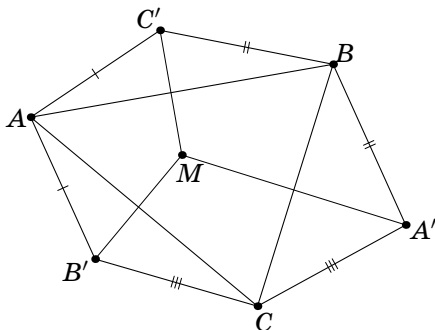
т. е. нарушилось бы неравенство треугольника. Противоречие.

**33. Решение.** Разобьем всех шахматистов на две группы: тех, кто набрал в первом турнире  $n$  очков или больше (пусть таких  $k$ ), и тех, кто набрал меньше  $n$  (их, соответственно,  $2n - k$ ).

Очевидно, сумма очков каждого шахматиста из первой группы уменьшилась, а из второй — увеличилась. Хотя бы в одной из этих групп не менее  $n$  шахматистов, следовательно, количество набранных ими суммарно очков  $S$  уменьшилось или увеличилось не менее, чем на  $n^2$ .

С другой стороны,  $S$  не могло измениться больше, чем на число партий, сыгранных первой группой со второй, т. е. на  $k(2n - k) \leq n^2$ . Сопоставление этих неравенств дает нужный результат.

**34. Указание.** В треугольнике  $ABC$  есть такая точка  $M$ , что точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  являются ее симметричными образами относительно прямых  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно. Поэтому треугольники  $MBC$ ,  $MAC$  и  $MAB$  равны треугольникам  $A'BC$ ,  $AB'C$  и  $ABC'$ .



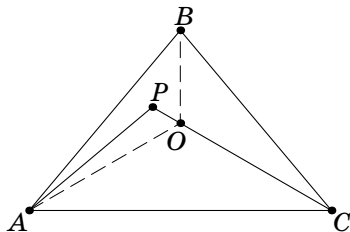
**35. Указание.** а) Из формулы суммы кубов

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

следует, что любая сумма нескольких подряд идущих кубов разлагается на множители, которые легко выписать. Предположение, что оба множителя являются степенями 97, быстро приводит к противоречию. Между тем число 97 простое, и число  $97^{97}$  других разложений на множители не имеет.

б) Следует использовать остатки по модулю 7. Как легко убедиться, число  $1997^{17}$  дает при делении на 7 остаток 4. Между тем сумма кубов не может дать такой остаток (каждый куб дает при делении на 7 остаток 0, 1 или  $-1$ , причем единицы и минус единицы чередуются так, что четверку набрать не удастся).

**36. Указание.** Рассмотрите на  $PC$  такую точку  $O$ , что треугольник  $AOC$  — равнобедренный ( $AO = OC$ ). Докажите, что  $P$  есть точка пересечения биссектрис треугольника  $AOB$ .



**Ответ.**  $100^\circ$ .

**37. Решение.** Самый нетривиальный момент решения — понять смысл числа 89.

Обозначим через  $P_n(r)$  число способов взвесить вес  $r$  граммов при помощи  $n$  гирь  $\{1, 2, \dots, 2^n\}$ , и через  $P_n$  — максимальное  $P_n(r)$ . Заметим, что если  $r = 2s$ , т. е. четно, то гирю в 1 грамм использовать невозможно, и разделив все веса на 2, мы получим:  $P_n(2s) = P_{n-1}(s)$  (откуда, очевидно,  $P_n(2s) < P_n$ ). Если же  $r = 2s + 1$ , т. е. нечетно, то гирю в 1 грамм можно положить на ту или другую чашку, откуда получаем:

$$P_n(2s + 1) = P_{n-1}(s) + P_{n-1}(s + 1).$$

Из этого легко следует, что

$$P_n \leq P_{n-1} + P_{n-2}, \quad (*)$$



и становится понятно, наконец, откуда взялось число 89: это 11-е число ряда Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...). Это дает оценку для пункта а).

Для решения б) нужно придумать такое число, чтобы неравенство (\*) на каждом шаге обращалось в равенство. Таким числом является (в двоичной записи) число  $1010\dots 01$  соответствующей длины. В частности, для  $n = 10$  таким числом является

$$256 + 64 + 16 + 4 + 1 = \frac{1024 - 1}{3} = 341.$$

Это и есть ответ для пункта б).

**38. Решение.** Всегда. В самом деле, оставим напоследок самый большой кусок, а остальные 24 разложим как попало, но по 12 в каждый пакет. Если оказалось, что разность весов двух пакетов меньше, чем вес самого большого куска, то его можно разрезать в соответствии с условием задачи. Если же нет (скажем, первый пакет весит намного больше) — начнем попарно менять куски местами. В какой-то момент окажется, что *до* замены первый пакет все еще весил больше, а *после* замены он весит уже меньше. Тогда то ли перед заменой, то ли после нее разность весов меньше, чем вес оставшегося (самого большого) куска.

*Другой способ.* Будем раскладывать куски, начиная с наименьшего, по очереди, то на правую, то на левую чашку. Тогда после раскладывания 24 кусков разность весов чашек меньше, чем вес самого большого куска (почему?).

**39. Указание.** Докажите, что точка  $E$  есть центр вневписанной окружности треугольника  $ABD$ , т.е. что в ней пересекаются биссектрисы угла  $B$  и двух внешних углов. Отсюда уже легко следует, что прямые  $AD$ ,  $AC$  делят развернутый угол в точке  $A$  (отрезок  $AB$  и его продолжение за точку  $A$ ) на три равные части.

**Ответ.**  $120^\circ$ .

**40. Указание.** Необходимо вначале взять гири веса 1, 2, 4, ..., ..., 128 (это 8 гирь). Теперь средний вес оставшихся немного больше 145.

**Ответ** в случае б) равен 145,25 (нужно взять еще 4 гири веса 145 г и 8 гирь веса 145 с четвертью). Чтобы набрать большой вес, нужно сначала взять 4 или 8 гирь веса 145,25, а остаток легко набирается другими гирями.

В случае а) **ответ** равен 146.

**41. Указание.** Каждая хорда  $H$  рассекает  $F$  на две части, одна из которых содержит  $G$ ; обозначим через  $S(H)$  площадь этой части. Рассмотрим какую-нибудь опорную хорду и будем поворачивать ее с тем, чтобы она все время оставалась опорной. При этом  $S(H)$  является непрерывной функцией угла поворота, и потому достигает минимума и максимума. Докажите, что в этих двух точках середина хорды лежит на контуре  $G$ .

**42. Решение.** Пусть  $x, y, z$  — кубические корни из  $a, b, c$  соответственно. Тогда

$$a + b = x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2.$$

Поэтому первое слагаемое можно оценить следующим образом:

$$\frac{1}{1+a+b} = \frac{xyz}{xyz+x^3+y^3} \leq \frac{xyz}{xyz+x^2y+xy^2} = \frac{z}{x+y+z}.$$

Дальнейшее очевидно.

**43. Решение.** Очевидно, что многочлены  $F$  и  $G$  имеют вид:

$$F(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{r-1} + x^s \dots,$$

(коэффициенты единица образуют отрезок длины  $r$ ),  $G(x) = 1 + x^r + \dots$  — или наоборот.

Докажите теперь индукцией по числу отрезков, что каждый следующий отрезок из единиц для многочлена  $F$  тоже имеет длину  $r$ .

*Другой способ.* Положим  $H(x) = F(x) \cdot (1 - x) = 1 - x^r + \dots$ , тогда  $H(x) \cdot G(x) = 1 - x^n$ . При этом все коэффициенты второго сомножителя равны 0 и 1, а первого — 0 или  $\pm 1$ . Докажите теперь, что в каждый из сомножителей  $H(x), G(x)$  входят только слагаемые вида  $\pm x^{kr}$ . Отсюда уже нетрудно получить нужный результат.

**44. Указание.** Достаточно ограничиться группой «более или менее параллельных» полосок. А именно, разделим круг на 12 частей по  $30^\circ$ , и соответственно разобьем все полоски на 6 групп в зависимости от того, в какую пару противоположных частей попадает прямая, параллельная полоске. Хотя бы в одной из этих групп суммарная ширина полосок больше, чем 16,66, и этих полосок достаточно, чтобы покрыть круг.

## XIX Турнир городов (1997/98)

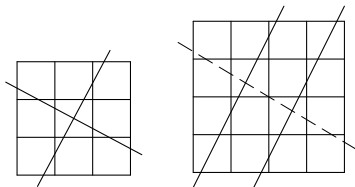
**1. Ответ.** По поднимающемуся быстрее.

**2. Решение.** Перепишем это уравнение в виде  $(z - y)(z + y) = x^2 - 1997$ . Возьмем произвольное достаточно большое нечетное  $x$ ; тогда в правой части стоит число  $N$ , большее нуля и делящееся на 4. Поэтому его можно разложить на множители (например,  $N = 2 \cdot N/2$ ), и принять  $z - y = 2$ ,  $z + y = N/2$ .

**3. Решение.** Эта задача проще всего решается тригонометрически. Пусть сторона квадрата равна 1, угол  $KAD$  равен  $\alpha$ , тогда угол  $MAD$  равен  $\alpha/2$ . После этого задача сводится к известному тождеству  $\frac{1}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

Существуют и чисто геометрические решения.

**4. Решение.** Прямая, пересекающая доску  $k \times k$ , пересекает, самое большее,  $k - 1$  прямую, разделяющую ее столбцы, и столько же прямых, разделяющих строки. Для того чтобы перейти из одного квадрата в другой, необходимо пересечь такую линию. Поэтому прямая проходит, самое большее, через  $2k - 1$  квадратиков; для  $k = 3$  — не более чем через 5, для  $k = 4$  — не более чем через 7. Отсюда следует, что в первом случае прямых должно быть не менее двух, а во втором — трех. Примеры показаны на рисунке.



**6. Указание.** Если вписанная окружность разделит третью сторону в отношении  $1:2$ , то внеписанная окружность уже автоматически разделит ее в нужном соотношении.

**Решение.** Если  $a = b$ , это невозможно (точки касания неизбежно попадут на середину  $c$ ), если же, для определенности,  $a > b$ , то требуется, чтобы  $a - b = c/3$ . При этом необходимо еще проверить условие  $c < a + b$ ,  $3(a - b) < a + b$ , или  $a < 2b$ .

**Ответ.**  $b < a < 2b$ ,  $c = 3(a - b)$ .

**7. Решение.** Легко видеть, что левая часть тождественно равна 0, если выполняется хотя бы одно из равенств  $x = y$ ,  $y = z$ ,

$x = z$ . Отсюда можно сделать вывод, что левая часть делится на  $(x - y)(y - z)(x - z)$ , и ввиду равенства степеней — совпадает с этим выражением с точностью до множителя. Последний факт проверяется либо непосредственным раскрытием скобок, либо преобразованием вида:

$$\begin{aligned} xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) &= \\ &= xy(x - y) + yz(y - z) + zx[(y - x) - (y - z)] = \\ &= (x - y)(xy - xz) + (y - z)(yz - xz); \end{aligned}$$

вынося за скобку  $(x - y)(y - z)$ , получаем нужный результат.

Отсюда видно, что если  $(x, y, z)$  — решение, то и  $(x + a, y + a, z + a)$  — решение при любом  $a$ , т. е. по одному решению строится бесконечная последовательность. Одно решение можно подобрать.

**8. Решение.** Тринадцать коней можно расставить без труда (на полях одного цвета). Остается доказать, что никакая другая расстановка не годится. Для этого заметим, что все поля доски, кроме центрального, можно разбить на два замкнутых маршрута коня (один маршрут из 8 полей, в который входят 4 угловых поля, другой — из 16 остальных полей). Если 13 коней как-то расставлены и не бьют друг друга, то на каждом из маршрутов поля, на которых они стоят, встречаются через одно, т. е. это либо все белые поля данного маршрута, либо все черные. Дальнейшее просто.

**9. Указание.** Равенство из условия можно переписать в виде

$$x_{n+1}x_{n+2} = x_nx_{n+1} - 1,$$

откуда ясно, на каком именно шаге это произведение станет равным 0.

**10. Решение.** Проведем произвольную прямую параллельно основанию, и построим на полученном отрезке  $KL$ , как на диаметре, полуокружность. Пусть  $N$  — точка пересечения этой полуокружности с  $AM$ . Угол  $KNL$  — прямой, как и требуется, и для построения нужной прямой остается только провести через  $M$  прямую, параллельную  $LN$ .

**11. Указание.** Начинать надо всегда со средней шашки (если  $n$  четно, то любой из двух средних), и затем двигать ее вправо-влево.

**12. Указание.** Следует несколько раз применить теорему о равенстве вписанных углов. Более конкретно: углы  $DAE$  и  $DBE$

равны. Таким образом, достаточно доказать, что  $\angle DAC = \angle DBE$ . Каждый из этих углов можно представить как сумму двух

$$\angle BDC + \angle DCB = \angle DBE, \quad \angle DAB + \angle BAC = \angle DAC,$$

которые равны почленно.

**13. Указание.** Докажите, что при любом таком перекатывании есть узел доски, который кубик обходит со всех 4 сторон подряд (пример такого обхода: кубик перекачивается в направлении  $f3-f4-e4-e3$ ). Легко убедиться, что с первой и с последней из 4 клеток (в примере — с клетками  $f3$  и  $e3$ ) соприкасается одна и та же грань кубика. Между тем они разного цвета. Противоречие.

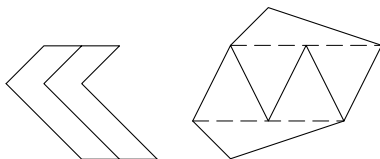
**Ответ.** Нет, нельзя.

**15. Указание.** Выразите отрезки  $AP$  и  $AQ$  через стороны треугольника. Из полученных формул будет следовать, что равенство имеет место в двух случаях:

- 1) если треугольник равнобедренный;
- 2) если стороны треугольника  $AC$ ,  $BC$ ,  $AB$  образуют геометрическую прогрессию (например, в треугольнике со сторонами 4, 6, 9).

**Ответ.** Нет, не следует.

**16. Ответ.** а), б) Нет, неверно. Контрпримеры показаны на рисунке (если многоугольник невыпуклый, то части можно перевести друг в друга с помощью параллельного переноса, если выпуклый — то с помощью симметрии с переносом).



в) Да, верно.

**Идея доказательства.** Пусть  $L$  — ломаная, разбивающая фигуру  $\Phi$  на две равные части,  $\Phi = R \cup S$ , и пусть  $A$  — одна из вершин ломаной  $L$ . Возьмем ту часть (пусть, например, это  $R$ ), к которой примыкает угол с вершиной  $A$ , больший  $180^\circ$ , и отобразим на  $S$ . Поскольку  $\Phi$  не имеет углов больше развернутого, точка  $A'$ , в которую переходит  $A$ , обязана также лежать на  $L$ .

Следовательно, некоторый кусок  $L$  переходит также в кусок  $L$ . Поскольку отображение было проведено с сохранением ориентации, между  $A$  и  $A'$  найдется точка, которая переходит сама в себя (почему?). Остается доказать, что движение, переводящее одну

часть в другую и сохраняющее точку, лежащую на  $L$ , — это непременно поворот на  $180^\circ$  относительно этой точки.

Отсюда уже нетрудно вывести, что если годится ломаная  $L$ , то годится и отрезок, соединяющий концы этой ломаной.

**17. Решение.** Рассмотрим вначале только члены, в которые единица (первое слагаемое) входит со знаком плюс. Обозначим один из радикалов (любой, кроме первого) через  $x$ , и будем рассматривать это выражение как многочлен от  $x$ . Разобьем все скобки на две группы: в одну соберем те, где  $x$  входит со знаком плюс, в другую — где входит со знаком минус. Произведение первых обозначим  $P_+(x)$ , вторых —  $P_-(x)$ . Очевидно,

$$P_-(x) = P_+(-x).$$

Таким образом, их произведение  $Q$  есть четный многочлен от  $x$ , т.е. в него  $x$  входит только в четных степенях. Поскольку это верно для каждого радикала,  $Q$  является целым числом. Остается заметить, что члены, в которые единица входит со знаком минус, дублируют уже учтенные (можно у каждого члена переменить знак всех слагаемых), так что все выражение равно  $Q^2$ .

**18. Ответ.** а) Да. б) Нет. Причина в том, что можно покрыть плоскость правильными шестиугольниками (но не пятиугольниками!) так, чтобы каждая точка была покрыта только одним шестиугольником.

**Решение.** б) Для построения контрпримера расположим салфетки «квадратно-гнездовым способом». А именно, пусть сторона пятиугольной салфетки равна одному метру, на плоскости задана система координат  $Oxy$ , первая салфетка расположена произвольно, а все остальные получены из нее параллельным сдвигом на вектор  $(a, b)$ , где  $a$  и  $b$  выражаются целым числом сантиметров,  $0 \leq a, b \leq 300$ . Вобьем гвоздь в произвольной точке; он пробьет те салфетки, центр которых расположен внутри пятиугольника, центрально-симметричного салфетке. Исходя из этого уже нетрудно доказать, что условие задачи не удастся выполнить.

Вообще, условие задачи не будет выполняться при *произвольном* расположении пятиугольных салфеток, если только они расположены «достаточно плотно».

а) Для того чтобы построить нужное расположение гвоздей, покроем мысленно всю плоскость шестиугольниками, равными салфетке, и вобьем гвоздь в центр каждого шестиугольника. Салфетка будет пробита тогда и только тогда, когда ее центр находится внутри соответствующего шестиугольника, т.е. один и только

один раз. (Детали, связанные со случаем, когда этот центр лежит на границе, мы оставляем читателям.)

**19. Ответ.** Да, следует.

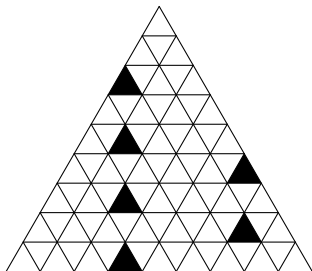
**Решение.** Назовем текст  $T$  двусмысленным, если он допускает две разных расшифровки  $A$  и  $B$ .

**Основная идея.** Доказать, что если шифр плохой, т.е. существует двусмысленный и притом достаточно длинный текст  $T$ , то  $T$  можно сократить, и при этом он останется двусмысленным.

Для этого рассмотрим произвольный плохой шифр  $\Pi$ ; пусть в нем не более  $m$  слов и каждое слово имеет длину не более  $n$ . Пусть  $T$  — длинный двусмысленный текст,  $A$  и  $B$  — его расшифровки. Выберем произвольную букву русского алфавита, слово, в котором она может стоять в расшифровке  $A$  (т.е. число от 1 до  $m$ ), и место, на котором она стоит в этом слове (т.е. число от 1 до  $n$ ), а также слово, в котором она может стоять в  $B$ , и ее место. Всего таких пятерок (буква, два слова и два места) имеется лишь конечное число, и согласно принципу Дирихле в длинном тексте какая-нибудь буква (обозначим ее  $z$ ) дважды стоит на одном и том же месте в одних и тех же словах в каждой расшифровке. Теперь можно выбросить из  $T$  кусок от одной до другой буквы  $z$ , и  $T$  остается двусмысленным.

Модификация того же способа: назовем *связкой* последовательность букв, которая является одновременно началом одного из слов  $A$  и концом одного из слов  $B$ . Разных связок имеется не более чем  $mn$ , поэтому в длинном тексте некоторая связка встречается дважды, и опять-таки можно выбросить кусок от одной до другой. Убедитесь сами, что в нашей задаче (при  $m = 33$ ,  $n = 10$ ) это позволяет доказать, что в любом плохом шифре существует двусмысленный текст длины не более 3000.

**20. Указание.** Введем в треугольнике «барицентрические координаты»: номера трех линий, на которых лежит данный тре-



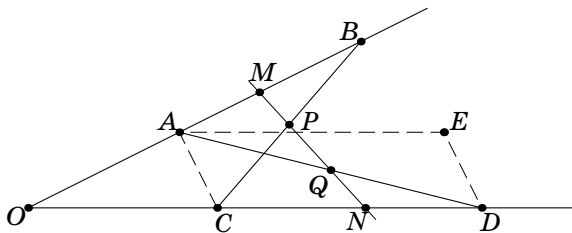
угольник (по трем направлениям). Пусть отмечено  $k$  клеток. Из условия следует, что сумма номеров каждой из координат всех отмеченных клеток не меньше, чем  $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ . С другой стороны, сумма барицентрических координат любой клетки равна  $n + 2$  или  $n + 1$  (почему?), откуда  $\frac{3k(k+1)}{2} \leq (n+2)k$ . Отсюда следует, что в общем случае  $k \leq \frac{2n+1}{3}$ . Эта оценка точна (рисунок показывает, как строится пример).

**Ответ.** а) 7 клеток, б) 6 клеток.

**21. Ответ.** Да.

**22. Указание.** При недиагональном ходе меняется цвет клетки. Между тем сделано 64 хода, и король вернулся в исходную клетку.

**23. Решение.** Пусть  $P$  — середина отрезка  $BC$ ,  $Q$  — середина  $AD$ . На продолжении отрезка  $CQ$  за точку  $Q$  отложим отрезок  $QE$ , равный  $CQ$ . Тогда  $AEDC$  — параллелограмм, а точка  $Q$  — его центр. Поскольку  $PQ$  — средняя линия треугольника  $BCE$ , то  $PQ \parallel BE$ , а значит,  $MN \parallel BE$ . Кроме того,  $AE \parallel ON$ , поэтому треугольники  $ABE$  и  $OMN$  подобны. Следовательно,  $OM/ON = AB/AE = AB/CD$ .



**24'. Решение.** При указанных условиях в левой части есть одно слагаемое со знаменателем  $7^3$ , которому не с чем сократиться (остальные члены имеют в знаменателе не более одной семерки).

**25. Ответ.** Нет. Подходящий треугольник существует (например с углами  $45^\circ$ ,  $67,5^\circ$  и  $67,5^\circ$ ). Разрежьте его сами.

**26. Указание.** Прямоугольник можно составить из двух правильных треугольников и двух равнобедренных треугольников с углом  $120^\circ$ . Кроме того, из трех одинаковых равнобедренных треугольников с углом  $120^\circ$  можно составить правильный. Поэтому достаточно восьми треугольников с углом  $120^\circ$ .

**Ответ.** Это возможно.



**27. Указание.** Если взять первую цифру, например, равной 5, то эту пятерку придется умножать на всевозможные произведения двух или трех оставшихся цифр, а потом сложить. Взяв вместо 5 другую цифру, мы увидим, что ее придется умножить на такую же сумму.

**Ответ.** а)  $(1 + 2 + \dots + 9)^3$ ; б)  $(1 + 2 + \dots + 9)^4$ .

**28. Указание.** Если клеток какого-то цвета только три, то из этих трех клеток только одна (самое большое) может граничить с двумя другими.

**Ответ.** Нужно разбить доску на 16 квадратов  $2 \times 2$  и каждый закрасить в свой цвет.

**29. Ответ.** 8 и 6.

**Решение.** Всякое решение первой системы является решением одного из 4 квадратных уравнений (соответственно знакам  $x$  и  $y$ ), так что первая система не может иметь более 8 решений; равенство достигается, например, при  $A = 5$ ,  $B = 3$ ,  $\{x, y\} = \{\pm 2, \pm 1\}$ . С другой стороны, если решение второй системы ненулевое, то из него легко сконструировать не менее 6 штук, меняя знаки и порядок чисел. Равенство достигается, например, если  $C = D = 1$ .

**30. Указание.** Пусть  $D$  — точка, симметричная  $O$  относительно другой стороны данного угла. Очевидно, достаточно (и необходимо) доказать, что  $D$  лежит на окружности, описанной вокруг  $\triangle ABC$ ; тогда центр этой окружности лежит на серединном перпендикуляре к  $AD$ , который совпадает с биссектрисой данного угла.

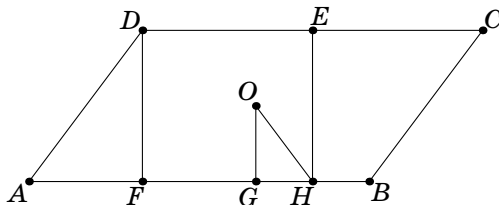
Для этого достаточно доказать, что

1)  $\angle BAC = 60^\circ$ ,

2)  $\angle BDC = \angle BOC = 120^\circ$ .

**31. Ответ.** Да. Например, можно взять числа вида  $p_1 \dots p_i^2 \dots p_{10}$ , где  $p_i$  — различные простые числа.

**32. Указание.** Пусть  $E$  — середина стороны  $DC$  и  $F, G, H$  — проекции точек  $D, O, E$  на  $AB$  соответственно. Докажите, что



треугольники  $ADF$  и  $HOG$  подобны, и выведите отсюда, что точка  $H$  совпадает с  $M$ . То, что точка  $H$  равноудалена от  $D$  и  $C$ , очевидно.

**33. Указание.** Докажите, что можно повернуть спицы так, что получится число вида  $abcabc$ , которое заведомо делится на 7, каковы бы ни были  $a, b, c$ .

**34. Указание.** Если допустить, что внезапно все лжецы стали правдивыми, а все правдивые — лжецами, то все ответы жителей останутся теми же, а доля лжецов, если она равнялась  $q$ , станет равна  $1 - q$ .

**Ответ.**  $1/2$ .

**35. Указание.** Квадрат имеет 36 узлов, поэтому диагоналей заведомо не более 18, и для того чтобы построить 16 диагоналей, должно остаться «незадействованными» 4 узла (пример проще всего построить, оставив «без дела» четыре угловых узла), а чтобы построить 17 диагоналей — только 2. Чтобы доказать, что это не получится, воспользуйтесь тем, что контур квадрата содержит 20 узлов, а контур внутреннего квадрата  $3 \times 3$  — только 12 узлов.

**Ответ.** 16.

**36. Решение.** Допустим, что максимальное число орехов нечетно (у одного или нескольких человек есть  $2k + 1$ ,  $k > 4$ , орехов, и ни у кого нет большего числа орехов). Назовем этих людей богачами. Легко видеть, что после первой передачи число богачей уменьшилось: во-первых, никто другой не стал богачом, и во-вторых, каждый богач передает соседу  $k + 1$  орех, большего числа орехов он заведомо получить не может, а столько же он получит только в случае, если его сосед слева тоже богач. Поэтому «самый левый» богач — тот, у кого сосед слева не был богат — после передачи перестал быть богачом. Дальнейшие рассуждения стандартны.

Теперь допустим, что максимальное число орехов четно и равно  $2k$ ,  $k > 5$  (если  $k = 5$ , то у всех по 10 орехов). В этом случае нужно рассуждать аналогично, но с одним существенным изменением: «богачами» нужно считать всех тех, кто имеет либо  $2k$ , либо  $2k - 1$  орехов. Тогда опять-таки легко доказать, что число богачей уменьшается.

**37. Указание.** Докажите сначала, что

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq a - \frac{a + b}{3}.$$

**38. Указание.** Если мы, прежде чем складывать эти стороны, умножим их на другие стороны прямоугольников, то получим сумму площадей, которая равна 1.

**Замечание.** В частности, это означает, что неравенство задачи обращается в равенство в единственном случае: если у всех прямоугольников большая сторона равна 1, т. е. если квадрат разрезан несколькими параллельными прямыми.

**39. Указание.** Если нужно получить число меньше  $2^9$ , то на первом шаге нужно сделать вычитание  $2^{10} - 2^9$ . В противном случае нужно число  $2^{10}$  использовать только на последнем шаге.

**Ответ.** а) Может. б) Может получиться любое нечетное число между 1 и  $2^{10} - 1$  (аналогично в задаче а) может получиться, в частности, число 97).

**40. Указание.** Из условия легко вывести, что треугольник  $BMD$  получается из треугольника  $AMC$  поворотом на  $120^\circ$ . В частности, это означает, что диагонали  $AC$  и  $BD$  равны и образуют угол в  $120^\circ$  (или  $60^\circ$ ). Теперь уже легко сообразить, почему условия существования точки  $N$  (то, что требуется доказать) совпадают с условиями существования точки  $M$  (что известно). Заметим, что тем же способом можно доказать, что если существует точка  $P$ , для которой треугольники  $APB$  и  $CPD$  — равнобедренные с углом  $\alpha$ , то существует также точка  $Q$ , для которой треугольники  $AQB$  и  $CQD$  — равнобедренные с углом  $180^\circ - \alpha$ .

Возвращаясь к нашей задаче, отметим еще, что найти точку  $N$  легко — достаточно построить равносторонний треугольник на стороне  $BC$ .

**41. Решение.** Плоших больше. В самом деле, на каждом месте есть две возможности — «ставить — не ставить перегородку», и потому лабиринтов, в которых данная перегородка имеется, ровно половина.

Отсюда легко сообразить, что имеется ровно четверть лабиринтов, в которых отгорожена клетка  $a1$  (чтобы ее отгородить, нужны 2 перегородки); также четверть, в которых отгорожена любая другая угловая клетка. Этого уже достаточно, чтобы убедиться, что доля хороших лабиринтов меньше, во всяком случае, чем  $(3/4)^4 = 81/256 < 1/2$ .

**42. Решение.** а) Фокусники улавливаются о нумерации карт (например, туз пик — 1, двойка пик — 2... король червей — 52). Тогда 24 способа, которыми выкладываются открытые карты, также занумерованы — в порядке возрастания (первый — от самой

маленькой карты к самой большой, и т. д.) Сверх того, чтобы указать второму номер закрытой карты, первый имеет возможность выбрать место закрытой карты (5 вариантов). Итак, он имеет 120 вариантов, чего более чем достаточно, чтобы указать номер закрытой карты.

б) Среди пяти карт не менее двух — одной масти. Вычислим две разности  $\bmod 13$  их номеров (например, если имеется 3 и 5 — разности равны 2 и 11; если 9 и туз — мы принимаем туз за  $1 \equiv 14 \bmod 13$ , и разности равны 8 и 5). Одна из этих разностей  $g - h$  не больше 6.

Уберем карту  $g$ . Способ ее угадать состоит в следующем: первой выложим карту  $h$ , теперь фокуснику известно, что спрятанная карта — той же масти, что  $h$ , и это одна из шести карт, следующих за ней. Остальные три карты раскладываются так, чтобы указать, сколько именно карт надо отсчитать от  $h$  (например, если имеется тройка и семерка пик — выкладывается тройка пик, а остальные три карты показывают число 4).

**Замечание.** По сути дела, требуется каждому набору  $A$  из 4 карт сопоставить не более 24 наборов  $B_1, \dots, B_k$  из 5 карт с тем условием, что эти наборы содержат  $A$ . Существование такого сопоставления следует из теоремы Холла (см., например, Харари Ф. «Теория графов» М.: Мир, 1973), которая, таким образом, дает доказательство — в высшей степени неэффективное (фокусникам потребуется располагать толстым талмудом, содержащим все наборы), но в принципе верное.

## XX Турнир городов (1998/99)

**1. Решение.** Очевидно, сумма чисел во всем кубе равна 400, а в слое  $1 \times 20 \times 20$  она равна 20. Применяя формулу включения и исключения, мы видим, что сумма в трех слоях  $1 \times 20 \times 20$  равна  $3 \cdot 20 - 3 \cdot 1 + 10 = 67$ . Искомая сумма равна 333.

**2. Решение.** Заметим прежде всего, что

$$103^2 = 10609, \quad 53^2 = 2809$$

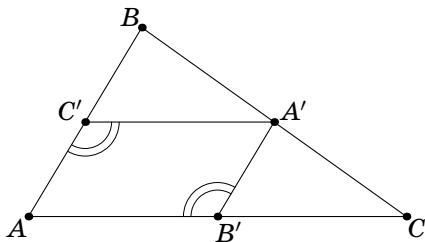
(в обоих случаях третья с конца цифра — четная). Теперь убедимся, что все прочие случаи сводятся к этим двум.

Для этого заметим, что третья справа цифра данного числа (обозначим его  $A$ ) никак не влияет на четность-нечетность третьей цифры его квадрата, поскольку в образовании третьей цифры участвует только ее удвоенное произведение на последнюю. То, что предыдущие цифры ни на что не влияют, очевидно.

Далее, если квадрат кончается девяткой, то последняя цифра — 3 или 7. Поскольку данное число  $A$  всегда можно заменить на  $1000 - A$  (последние 3 цифры не меняются), можно считать последнюю цифру равной 3. Тогда для того чтобы предпоследняя цифра квадрата равнялась 0, требуется, чтобы предпоследняя цифра  $A$  равнялась 0 или 5.

**3. Решение.** Углы  $AB'A'$  и  $AC'A'$  равны, т.к. дополняют до  $180^\circ$  равные углы  $CB'A'$  и  $A'C'B$ . Углы  $B'AC'$  и  $B'A'C'$  тоже равны, т.к. дополняют до  $180^\circ$  равные суммы  $\angle C'B'A + \angle AC'B$  и  $\angle BA'C' + \angle B'A'C$ . Отсюда следует, что  $AB'A'C'$  — параллелограмм и  $AC' = B'A'$ .

Аналогично доказывается еще пять таких же равенств, соответствующих перестановкам букв  $A, B, C$ . Из них получается, в частности, что  $AC' = C'B$ , т.е.  $C'$  — середина стороны  $AB$ . Для точек  $A'$  и  $B'$  аналогично.



**4. Указание.** Если  $k$ -й кандидат сказал правду, то все последующие ошиблись на 1, т. е. солгали.

**Ответ.** 12 раз.

**5. Решение.** Если  $m$ ,  $n$  разной четности, то годится обычная шахматная закрашка. Если оба числа нечетные, то достаточно закрасить столбцы попеременно: черный — белый — черный — белый. Случай, когда числа  $m$  и  $n$  оба четные, разбирается стандартным образом.

**6. Указание.** Девять самых тяжелых гирь (11—19 г) весят как раз на 90 г больше, чем 9 самых легких (1—9 г). Отсюда следует, что при любом другом распределении разность весов будет меньше 90.

**Ответ.** 10 г.

Сравните с задачей XVI.37.

**7. Решение.** Выберем один из кругов. Длина его дуги, входящая в периметр, пропорциональна углу, на который она опирается. Поскольку сумма этих углов равна  $2\pi$ , длина периметра не зависит от расположения кругов (что, собственно говоря, подсказывается формулировкой) и для ее вычисления достаточно, например, считать, что каждый из углов равен  $2\pi/n$ .

**Ответ.**  $4\pi$ .

**8. Решение.** Допустим противное. Выберем самую левую и самую правую из отмеченных клеток. Между ними не более 3 вертикалей (иначе коню просто не дойти за 2 хода), следовательно, все отмеченные клетки расположены только на 5 вертикалях. Аналогично все они расположены на 5 горизонталях, т. е. находятся в квадрате  $5 \times 5$ .

Отсюда следует, что не все клетки одного цвета (в квадрате  $5 \times 5$  только 13 клеток одного цвета). Притом имеется не менее 9 клеток одного цвета, например, белого. Возьмем теперь одну из отмеченных черных клеток; за 1 ход конь может попасть с нее не более чем на 8 белых клеток, и следовательно, для попадания на девятую требуется не менее 3 ходов.

**9. Указание.** Если  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{20}$  максимально, то максимально также выражение

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_{20} \cdot (1 - x_1) \cdot \dots \cdot (1 - x_{20}).$$

В то же время  $x_1 \cdot (1 - x_1) \leq 1/4$ , равенство достигается при  $x_1 = 1/2$ . Аналогично для  $x_2, \dots, x_{20}$ .

**Ответ.**  $x_1 = x_2 = \dots = x_{20} = 1/2$ .

**10. Ответ. б)** Это невозможно. **в)** Это возможно.

**Решение.** Если две группы людей  $X$ ,  $Y$  объединяются, то рейтинг объединения  $X \cup Y$  находится между рейтингами составляющих:  $Q(X) < Q(X \cup Y) < Q(Y)$  или наоборот.

Отсюда легко следует, что при первой миграции рейтинг обеих стран мог вырасти в том и только в том случае, если

$$Q(A) > Q(E) > Q(B),$$

где  $E$  — группа мигрантов. Далее, отсюда следует также, что измененные рейтинги стран удовлетворяют неравенствам  $Q(A') > Q(A)$ ,  $Q(E) > Q(B') > Q(B)$ , откуда  $Q(A') > Q(B')$ , а это, согласно предыдущему, означает, что вторая миграция не могла дать повышения обоим рейтингам (хотя, в принципе, могла повысить один из них).

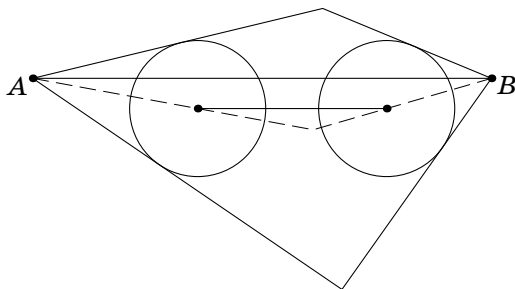
Идея примера для п. **в)** такова: пусть в стране  $B$  есть небольшая группа людей с очень высоким интеллектом, которые никуда не уезжают. Эта группа ощутимо повышает  $Q$  всей страны, причем в случае миграции  $Q(B)$  почти автоматически повышается, если ее население убывает (независимо от того, кто въехал и кто выехал).

Конкретно: пусть в стране  $A$  всего два жителя  $a$ ,  $b$  с показателями  $Q = 1$  и  $3$ , в стране  $B$  — пять жителей  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $g$  ( $Q = 4, 4, 6, 6$  и  $55$ ), в стране  $B$  — один житель  $h$  ( $Q = 1$ ). При первой волне эмиграции из  $A$  в  $B$  эмигрировал житель  $a$ , а из  $B$  в  $B$  — жители  $c$ ,  $d$ . При второй волне из  $B$  в  $B$  переехал  $h$ , а из  $B$  в  $A$  —  $e$  и  $f$ . Рейтинги стран при этом менялись так:  $A — 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ ;  $B — 15 \rightarrow 17 \rightarrow 19$ ;  $B — 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ .

**Замечание.** Казалось бы, пункт **в)** можно свести к пункту **б)**, объединив страны  $A$  и  $B$  (в этом случае рейтинг объединенной страны находится между рейтингами  $A$  и  $B$ ); пренебречь миграцией внутри объединенной страны, а для двух стран, как было показано, вторичное повышение обоих рейтингов невозможно. Однако хитрость в том, что хотя, действительно, при второй миграции рейтинг объединенной страны  $A \cup B$  снизился, тем не менее рейтинг каждой из ее частей  $A$ ,  $B$  по отдельности — вырос!

**12. Решение.** Задача имеет «высокую степень свободы»: действовать можно почти что как угодно. В частности, и Игорь, и Валя могут разрезать свои квадраты на доминошки произвольным образом; после этого у каждого будет несколько синих, несколько белых и несколько сине-белых доминошек. Если доминошек каждого типа поровну, то доказывать нечего, если же нет, то достаточно заметить, что из пары сине-белых доминошек можно сложить такой же квадрат  $2 \times 2$ , как из синей и белой доминошки.

**13. Указание.** Центр искомой окружности лежит на пересечении прямых, одна из которых проходит через точку  $A$  и центр окружности, ближайшей к  $A$ , другая — через  $B$  и центр второй окружности, а сама она получается гомотетией первой окружности с центром гомотетии в  $A$ , (либо гомотетией второй с центром в  $B$ ).



**14. Решение.** Всякая диагональ делит множество из 23 оставшихся вершин на 2 непустых подмножества (вершины по одну и другую сторону диагонали). Таким образом, все диагонали можно разбить на 11 классов  $\{1 - 11\}$  по тому, сколько вершин входит в меньшее из этих множеств.

Допустим, что в некоторой точке  $A$  пересекается не менее 9 диагоналей, и пусть  $d$  — одна из них. Каждая из оставшихся восьми соединяет две вершины, лежащие по разные стороны от  $d$ . Так как разные диагонали должны исходить из разных вершин, то отсюда следует, что  $d$  может принадлежать только к типам  $\{8 - 11\}$ . То же верно и для любой другой диагонали из числа пересекающихся в точке  $A$ .

Но тогда, по принципу Дирихле, не менее трех диагоналей принадлежат к одному типу. Между тем легко доказать, что три диагонали одного типа не могут пересекаться в одной точке. Противоречие.

**15. Решение.** Бусинки разложены несколькими цепями, а именно: в одной коробке (будем считать ее первой) лежат, скажем, бусинки цветов 1 и 2, в другой (во второй) — цветов 2 и 3, в третьей — 3 и 4, и так далее, пока цепь не замкнется: в  $r$ -й коробке бусины цветов  $r$  и 1.

Легко видеть, что в каждой цепи выбор бусинок можно произвести двумя способами. Отсюда число выборов равно  $2^k$ , где  $k$  —



число цепей. (Например, если в каждой коробке обе бусинки одного цвета, то каждая цепь имеет длину единица,  $k = 20$ , и число способов равно  $2^{10}$ .)

**16. Решение.** Пусть в мешке было  $m$  монет. Легко видеть, что разность между стоимостью любых двух монет делится на  $k$ , т. е. остаток  $r$  от деления номинала любой монеты на  $k$  один и тот же. По условию, стоимость любого набора из  $m - 1$  монет делится на  $k$ , откуда следует, что  $(m - 1)r$  делится на  $k$ . Допустим, что  $m - 1$  не делится на  $k$ , тогда  $r$  и  $k$  имеют общий делитель  $d > 1$ . Тогда и номинал любой монеты делится на  $d$ .

Остается «деноминировать» грош, приравняв один новый грош к  $d$  старым, и провести то же рассуждение заново с «новыми грошами». Теперь оно показывает, что  $m - 1$  делится на  $k$ .

**17. Решение.** Обе задачи можно привести к единой формулировке: может ли  $\text{НОК}(m, m + q)$  быть равен  $\text{НОК}(n, n + q)$ ? В задаче а) дополнительно известно, что  $q = 5$ , а в задаче б) — что  $n > m$ .

**Ответ** в задаче б) — нет, откуда получается и решение задачи а) как частный случай.

Доказательство можно провести индукцией по  $q$ . Если  $q = 1$ , то

$$\text{НОК}(m, m + 1) = m \cdot (m + 1), \quad \text{НОК}(n, n + 1) = n \cdot (n + 1),$$

откуда сразу следует, что  $m = n$ , вопреки условию задачи б).

Пусть теперь  $q > 1$ , и  $p$  — какой-нибудь простой множитель  $q$ . Если  $m$  делится на  $p$ , то  $\text{НОК}$  также делится на  $p$ , откуда также  $n$  делится на  $p$ . Тогда можно все три числа  $m$ ,  $n$ ,  $q$  сократить на  $p$ , уменьшив, таким образом,  $q$ , и применить индукцию.

Так можно действовать до тех пор, пока число  $q$  не станет взаимно простым с  $m$  и  $n$ . В этом случае опять-таки  $\text{НОК}$  равен произведению соответствующих чисел, и  $m = n$ .

**19. Решение.** Рассмотрим верное в нашем случае равенство

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 + c_1)^3 + (a_2 + b_2 + c_2)^3 + (a_3 + b_3 + c_3)^3 = \\ = (a_1 + a_2 + a_3)^3 + (b_1 + b_2 + b_3)^3 + (c_1 + c_2 + c_3)^3. \quad (*) \end{aligned}$$

В обеих частях этого равенства встречаются кубы всех девяти чисел  $a_1, \dots, c_3$ , которые взаимно уничтожаются. Коэффициент при  $a_1^2$  в левой части равен  $3(b_1 + c_1)$ , в правой —  $3(a_2 + a_3)$ . Поскольку  $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + b_1 + c_1$ , они равны и тоже уничтожаются. Аналогично равны коэффициенты при  $a_2^2, \dots, c_3^2$ . Значит, из

равенства (\*) следует равенство

$$6a_1b_1c_1 + 6a_2b_2c_2 + 6a_3b_3c_3 = 6a_1a_2a_3 + 6b_1b_2b_3 + 6c_1c_2c_3,$$

что и требовалось.

**20. Указание.** Число способов равно числу подмножеств среди 10 членов жюри (мы отбрасываем Н. Н., которому присваиваем № 1, и номер второй, место которого во всяком случае занято). Рассмотрите, к примеру, как именно рассядутся члены жюри, если известно, что на свои места не попали № 4, 8, 9 (и, разумеется, 1, 2), а остальные сели на свои места.

**Ответ.**  $2^{10}$ .

**21. Решение.** Факт отнюдь не очевиден, и доказывается следующим образом. Рассмотрим 9 чисел — длины проекций ребер внутреннего параллелепипеда на ребра внешнего. Сумма проекций данного ребра не меньше, чем само ребро. В то же время сумма трех проекций на данное ребро внешнего параллелепипеда не превосходит длины этого ребра (почему?). Отсюда видно, что

$$\left( \begin{array}{c} \text{размер внутреннего} \\ \text{параллелепипеда} \end{array} \right) \leq \left( \begin{array}{c} \text{суммы девяти} \\ \text{проекций} \end{array} \right) \leq \left( \begin{array}{c} \text{размер} \\ \text{внешнего} \end{array} \right).$$

**Ответ.** Нет, не может.

**22. Указания.** (2)  $\Rightarrow$  (1). Очевидно, для того чтобы скомбинировать функцию из приведенных, необходимо один или несколько раз использовать функцию третьего типа ( $y = x^2$ ). Преобразования первых двух типов задают дробно-линейные функции, которые «почти взаимно однозначны»; если исключить конечное число значений (которое нас, по смыслу задачи, не интересует), то функция взаимно однозначна. С другой стороны, функция  $x^2$  не принимает значения из целого промежутка  $I = (-\infty, 0)$ . Рассмотрим последнюю по счету функцию  $x^2$ , которая использована в конструкции (считая в порядке применения к аргументу, то есть справа налево). После нее идет еще дробно-линейная функция, которая почти взаимно однозначно отображает  $I$  на некий другой интервал  $J$ . Значений из интервала  $J$  функция принимать не будет.

(1)  $\Rightarrow$  (2). Рассмотрим в качестве примера функцию

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 2x + 2}.$$

Ее можно преобразовать следующим образом:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + 2x + 2} = 1 + \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2} \rightarrow \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 2} = x + \frac{2}{x + 2} \rightarrow y - 2 + \frac{2}{y}.$$

Здесь  $y = x + 2$ , стрелка обозначает переход от одной функции к другой, который легко осуществить.

Проверьте сами, что подобным же образом можно привести произвольную функцию вида  $f(x)$  к виду  $g(y) = ay + b/y$ .

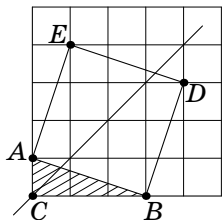
Легко видеть, что если  $ab \leq 0$ , то условие (1) не выполняется, функция  $g$  принимает все или почти все значения. Остается проверить, что любая функция  $g$  при  $ab > 0$  может быть представлена в виде (2). Опять-таки приведем пример: пусть для простоты  $a = b = 1$ . Положим  $h(x) = ((x+1)/(x-1))^2$ , тогда  $g(x)$  представима в виде

$$4(1+h(x))^{-1} + 2 = 4\left(\frac{4x}{(x-1)^2}\right)^{-1} + 2 = \frac{(x-1)^2}{x} + 2 = x + \frac{1}{x} = g(x).$$

**23. Ответ.** В полтора раза.

**24. Подсказка.** Биссектриса проходит через центр квадрата, и потому делит стороны квадрата  $DE$  и  $AB$  в одном и том же отношении.

**Ответ.** В отношении 1 : 3. Решить задачу проще всего, нарисовав чертеж на клетчатой бумаге; координаты точек будут  $C(0, 0)$ ,  $A(0, 1)$ ,  $B(3, 0)$  и т.д., а уравнение биссектрисы:  $x = y$ .



**25. Указание.** Если нарисовать, пользуясь числами первой доски, такую картинку с квадратиками: в первой строке число квадратиков равно наибольшему числу, во второй — второму по величине и т.д., то картинка для второй доски будет иметь вид такой же, но отраженный: строки станут столбцами, и наоборот.

**Замечание.** Вот еще одна задача, в которой главная часть решения — уяснить себе смысл условия.

**26. Указание.** Три треугольника нужно поставить рядом друг с другом и покрыть кусочком получившейся равнобедренной трапеции одну из вершин вместе с ее маленькой окрестностью. При этом каждый треугольник пересекается с данным. Остальные шесть треугольников располагаются аналогичным образом вокруг двух других вершин.

**27. Решение.** Очевидно, прямые разбили квадрат на 10 «строк» и 10 «столбцов». Поэтому достаточно доказать, что какие-то два квадрата стоят в одной строке или одном столбце. Предположим противное, и пусть квадраты стоят в строках и столбцах  $(a_1, b_1), \dots, (a_9, b_9)$ . Тогда ширина соответствующих строк и

столбцов одна и та же, остался только один столбец и только одна строка, и ширина и того, и другой равна разности между стороной квадрата и шириной этих девяти строк или столбцов. Поэтому десятый столбец имеет ту же ширину, что десятая строка, и имеется десятый квадрат, вопреки условию.

**28. Указание.** Докажите, что числа в ряду повторяются с периодом 6.

**Ответ. 1.**

**31. Указание.** Из двух квадратов составляем прямоугольник и накрываем серединой стороны этого прямоугольника точку вблизи одной из вершин данного квадрата. Два квадрата «пристроены». Еще 4 квадрата располагаются аналогичным образом около двух других вершин, а последний, 7-й — около четвертой.

Сравните с задачей 26 и разберитесь, почему для треугольника можно возле каждой вершины расположить поровну треугольников, а здесь это не получается.

**32. Ответ. 2.**

**Решение.** Первому игроку, чтобы обеспечить себе выигрыш 2, достаточно сделать первый ход в центр квадрата, а затем держаться симметрии. Стратегия второго чуть сложнее, и состоит в следующем: он должен держаться симметрии, пока это возможно (т.е. пока первый не поставил крестик в центр). В этот момент он делает произвольный ход в клетку  $A$ , а затем опять держится симметрии, пока это возможно (т.е. пока первый не сделал ход в клетку  $B$ , симметричную  $A$ ); тут он вновь делает произвольный ход, и так далее. Легко убедиться, что при этом он проигрывает ровно 2.

**33. Указание.** Число долларов, которые можно взять, должно делиться на 6.

**Ответ. 498 долларов.**

**34. Указание.** Докажите, что каждое из этих условий (как то, что дано, так и то, что требуется доказать) равносильно утверждению: все четыре угла  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$  и  $ODA$  равны.

**Замечание.** Любое из этих условий равносильно также и такому условию: отношение диагонали  $BD$  к стороне  $CD$  равно  $\sqrt{2}$ .

**35. Ответ. Всегда.**

Более того, первые 1000 ходов он может ходить произвольно, а далее действовать по следующему алгоритму:

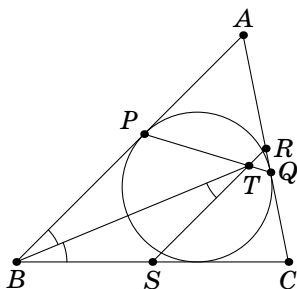
1) если на  $n$ -м и  $(2000 - n)$ -м местах (которые в конце окажутся симметричными) стоят одинаковые цифры, меняет их местами, т. е. никак не изменяет ряд цифр;

2) если на этих местах разные цифры, то одна из них не совпадает с той, что стоит на 1000-м месте, и второй игрок меняет ее с 1000-й цифрой.

**37. Указание.** Примем для определенности, что  $AB > BC$ , точка  $R$  лежит на  $AC$ , а точка  $S$  — на  $BC$ . Обозначим стороны  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  через  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно. Легко видеть, что

$$RQ = RC - QC = \frac{b}{2} - \frac{a+b-c}{2} = \frac{c-a}{2}.$$

Треугольник  $RQT$  подобен равнобедренному треугольнику  $AQP$ . Поэтому  $RQ = RT$ . Отсюда уже легко следует, что треугольник  $TSB$  равнобедренный ( $ST = BS$ ) и  $\angle SBT = \angle STB = \angle TBA$ . Это и означает, что  $T$  лежит на биссектрисе угла  $B$  (см. рисунок).



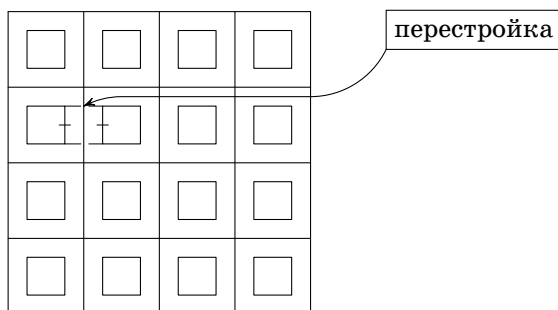
**38. Решение.** Разобьем доску на 16 квадратов  $2 \times 2$ , и заставим ладью обходить каждый квадрат по отдельности. При этом выполнены все условия задачи (по совокупности ладья обходит всю доску, всякий раз она возвращается на то место, с которого начала), с одной оговоркой: вместо одного маршрута получилось 16.

Назовем такую ситуацию, когда ладья обходит всю доску, но не за один раз, а за несколько, «кусочным маршрутом»; такой «кусочный маршрут», естественно, можно строить многими способами. Отметим, что приведенный кусочный маршрут обладает еще и тем свойством, что число горизонтальных ходов равно 32, как и требуется в условии.

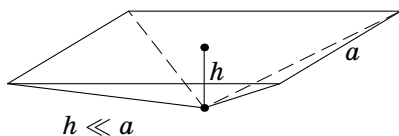
Сделаем теперь какую-нибудь «перестройку», а именно: выберем какое-нибудь место, где рядом стоят два горизонтальных

хода, и заменим их на два вертикальных (или наоборот). При этом разность между числом горизонтальных и вертикальных ходов изменяется на 4. Кроме того, при этом число кусков, из которых состоит маршрут, изменяется на 1: либо два куска объединяются в один, либо наоборот, один кусок распадается на 2.

Отсюда следует, что для того, чтобы преобразовать 16 маршрутов в один (докажите самостоятельно, что несколькими перестройками можно получить *любой* такой маршрут), требуется нечетное число перестроек, а это и означает, что исходное число для 16 кусков — 32 горизонтальных хода — будет меняться нечетное число раз.



**39. Ответ.** Да. Можно, например, взять пирамиду, у которой высота много меньше стороны основания, и опустить в воду вершиной вниз.



**40. Указание.** Задача решается прямым счетом углов. А именно, пусть  $\angle AOB = \alpha$ ,  $\angle COD = \beta$ . Докажите, что

$$\angle AHD = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = \angle AFD.$$

**41. Указание.** Докажите сначала, что  $x$  и  $y$  взаимно просты, и воспользуйтесь тем, что

$$y(xy - 1) = x(x^2 + y^2) - (x^3 + y)$$

делится на  $x^2 + y^2$  (следовательно,  $xy - 1$  тоже делится на  $x^2 + y^2$ ).

**Ответ.**  $x$  и  $y$  равны 0, 1 или  $-1$ .

**42. Указание.** Выберите ту пару секторов с равными числами, расстояние между которыми наименьшее, и докажите, что:

- 1) все сектора между ними одного цвета;
- 2) полукруг, начинающийся в одном из них, — искомый.

**43. Решение. а)** Такими числами являются все числа, которые в двоичной записи заканчиваются

- 1) на  $\dots 01$  (таких четверть, т. е. 250),
- 2) на  $0111$  (их шестнадцатая часть, т. е. не менее 62),
- 3) на  $011111$  (их  $1/64$  часть, т. е. не менее 15). Этого достаточно.

Заметим еще (это понадобится в пункте б)), что «плохими» являются, во всяком случае, все числа, заканчивающиеся нулем, т. е. «плохих» чисел не менее половины.

**б)** Рассмотрим последние 4 цифры числа в двоичной записи. Прибавить 7 — все равно, что вычесть 1 и прибавить 8, т. е. единицу в четвертом разряде. Из этого ясно, что годятся, во-первых, все числа вида  $\dots 0**1$  (4-я цифра с конца равна 0, а последняя — 1; прибавив 7, мы получим  $\dots 1**0$ ), а также числа вида  $\dots 0100$  (прибавив 7, получим  $\dots 1011$ ). Это составляет  $5/16$  от общего числа в миллион.

Рассмотрим теперь числа вида  $\dots 1***$ . Если последние три цифры — нули, то это число заведомо не годится. Поэтому потребуем дополнительно, чтобы хоть одна из этих цифр была больше нуля; доля таких чисел составляет  $7/16$ .

Отбросим временно три последние цифры. Тогда получается, что к нашему числу прибавляется единица, и мы находимся в ситуации задачи а). Правда неизвестно, требуется ли нам, чтобы  $M(i) = M(i+1)$ , как в задаче а), или, напротив, чтобы имело место неравенство. Однако и в том, и в другом случае доля «хороших» чисел, как мы уже знаем, не меньше, чем  $0,32$ .

Отсюда доля чисел, для которых  $M(i) = M(i+7)$ , во всяком случае не меньше, чем

$$\frac{5}{16} + 0,32 \cdot \frac{7}{16} = 0,3125 + 0,14 > 0,45,$$

что и требовалось.

## XXI Турнир городов (1999/2000)

**1. Решение.** а) Получилась трапеция, у которой одно основание вдвое меньше другого. Соответственно и боковые стороны треугольников, образовавшихся при пересечении диагоналей, относятся как 1 : 2.

**Ответ. б)** 1/6.

**2. Ответ.** Нет в обоих случаях.

**Решение.** Если все три числа ненулевые, то два из них имеют один знак; пусть это  $a$  и  $b$ . Подставим  $c = -(a + b)$ . Тогда

$$d = a^{1999} + b^{1999} - (a + b)^{1999} = -ab(a^{1997} + \dots + b^{1997}).$$

Таким образом,  $d$  раскладывается на три множителя, из которых могли бы равняться  $\pm 1$  только первые два. Но числа  $a = b = \pm 1$  явно не годятся. Случай, когда одно из чисел равно нулю, также очевиден.

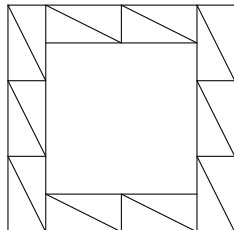
**3. Указание.** Все прямые подразделяются на пучки попарно параллельных прямых, причем в каждом пучке должно быть поровну прямых. Кроме того, надо учесть, что число 1999 — простое.

**Ответ.** 2000 или 3998.

**4. Решение.** Замедлим вдвое ход обычных часов. Тогда на них, как и на итальянских, часовая стрелка будет проходить оборот за 24 часа, но минутная стрелка будет двигаться вдвое медленнее. Получается, что в любой момент суток часовая стрелка обоих часов занимает одно и то же положение (притом только раз в сутки), а минутные движутся с разной скоростью. Требуется, следовательно, чтобы удвоенный путь минутной стрелки совпал с одинарным, а это возможно тогда и только тогда, когда минутная стрелка прошла несколько полных оборотов.

**Ответ.** Совпадение происходит всякий раз, когда минутная стрелка стоит вертикально, т. е. 24 раза в сутки.

**5. Указание.** Нужно сначала выложить плашки «бордюра» — клетки на краю доски. После того как эти клетки выложены на доске  $8 \times 8$ , остается выложить внутреннюю доску  $6 \times 6$ ; на ней опять нужно выложить ее «бордюр», после чего останется доска  $4 \times 4$ , и т. д.





Убедитесь сами, что бордюр можно выложить единственным образом, и никаких трудностей при этом не возникает.

**Ответ.** Это можно сделать для любой доски  $2n \times 2n$ .

**6. Ответ.**  $\pi/7$ ,  $2\pi/7$ ,  $4\pi/7$ .

**7. Указание.** Найдите закон, по которому меняется остаток от деления этого числа на 3.

**8. Ответ.** 2000 или 3998.

Сравните с решением задачи 3.

**9. Решение.** Нет, нельзя. Сумма  $1 + 2 + \dots + 50$  — число нечетное, а при любом разделении точек  $\{1, \dots, 100\}$  на пары  $\{a_k, b_k\}$  сумма разностей будет равна  $1 + 2 + \dots + 100 - 2(a_1 + \dots + a_{50})$ , т. е. будет четной.

**11. Указание.** Воспользуйтесь тем, что по крайней мере два числа, стоящие правее очередного четного числа, — нечетные.

**Ответ.** 5 (строка 21 345).

**12. Решение.** Пусть площадь треугольника  $ABC$  равна 1,

$$\alpha = \frac{C'A}{BA}, \quad \beta = \frac{A'C}{BC},$$

тогда площади треугольников  $AB'C'$ ,  $A'B'C$  и  $A'BC'$  равны соответственно  $\alpha/2$ ,  $\beta/2$  и  $(1 - \alpha)(1 - \beta)$ . Площадь  $S$  треугольника  $A'B'C'$  дополняет эти три площади до единицы и равна  $S = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \alpha\beta$ . Получаем соотношение

$$\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\left(\frac{1}{2} - \beta\right) = \frac{1}{4} - S,$$

откуда легко следуют оба утверждения (надо еще использовать, что оба сомножителя в левой части по модулю меньше  $1/2$ ).

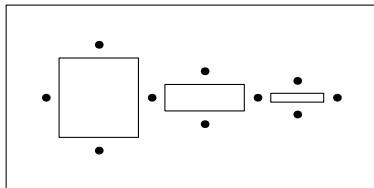
**14. Указание. а)** Каждая фишка должна сделать не менее 7 ходов, чтобы достичь нужной горизонтали; сверх того, на каждой из вертикалей одна из фишек (черная или белая) должна уступить другой дорогу, а следовательно, нужен еще по меньшей мере 1 ход (можно черной, можно белой фишкой). Отсюда получаем оценку  $16 \cdot 7 + 8 = 120$ . Остается проверить, что 2 черные и 2 белые фишки можно поменять местами за 30 ходов.

**б)** Аналогичные соображения дают оценку  $14 \cdot 6 + 7$ . Однако надо еще учесть, что в окончательном положении 7 белых и 7 черных фишек обязаны вновь, как и в начале, стоять на разных вертикалях. Отсюда легко следует, что ходов вбок (по горизонтали) должно быть четное число, т. е. не менее 8. Итак, ответ —  $14 \cdot 6 + 8 = 92$ .

**15. Указание.** Если первые два числа меньше, чем  $10^n$ , то ни одно из последующих чисел также не станет больше  $10^n$ . (Посмотрите, что именно произойдет с числом  $999 \dots 9a$  при ходе Еремы.)

**16. Ответ.**  $3n + 1$ .

**Указание.** Для доказательства того, что меньшим числом не обойтись, можно, например, расположить дырки в один ряд (см. рисунок) и отметить  $3n + 1$  точек так, чтобы никакие две не могли попасть в один прямоугольник (по одной — над каждой дыркой, по одной — под каждой; еще  $n + 1$  — слева направо).



Обойтись  $3n + 1$  частями можно сделав, например, все необходимые горизонтальные разрезы и ни одного вертикального. В этом случае будет сделано  $4n$  разрезов. Примите еще во внимание, что каждый разрез

- 1) или создает новую часть,
- 2) или уменьшает число дырок на одну: либо соединяет одну из дырок с краем листа, либо соединяет две дырки между собой.

**17. Решение.** При  $n = 3$  числа можно расставить в любом порядке. Докажем теперь, что нечетных чисел должно быть по крайней мере вдвое больше, чем четных, откуда и следует, что другие  $n$  не годятся.

В самом деле, допустим, что по кругу подряд стоят два четных числа  $q$ ,  $r$  и  $p$  — стоящее перед ними число. Тогда  $p + q$  должно делиться на 2, т. е.  $p$  тоже четное. Аналогично должно быть четным число, стоящее перед  $p$ , и т. д., — выходит, что все числа четные, что неверно.

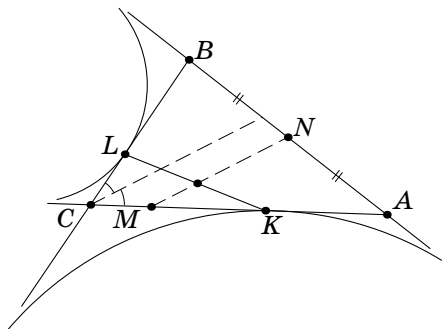
Следовательно, перед четным должно стоять нечетное. Но тогда и предыдущее должно быть нечетным; перед всяким четным числом стоит не менее 2 нечетных, что и требовалось.

**18. Указание.** Допустим сначала, что нам разрешено также действовать ножницами и отрезать мешающие нам куски листа. Тогда можно обрезать его так, чтобы остался только небольшой выпуклый кусок, содержащий данные точки (в задаче а) — от-

резок прямой плюс его небольшая окрестность, в задаче б) — треугольник плюс окрестность), и нетрудно выполнить требование задачи. Так, в задаче а) надо просто шаг за шагом прикладывать первую точку ко второй, затем их вместе — к третьей, и т. д.

Ножниц у нас нет. Но можно обойтись без них, сложив мешающие нам края листа «гармошкой», а далее действовать, как выше.

**20. Указание.** Пусть  $N$  — середина  $AB$ . Проведите через  $N$  прямую, параллельную биссектрисе, и пусть она пересекает, например, сторону  $AC$  в точке  $M$ . Докажите сначала, что  $CM = (b - a)/2$  (отсюда следует, что  $M, N$  делят периметр пополам), а затем — что  $MN$  делит пополам отрезок  $KL$ .



**21. Решение.** Допустим, что на одной из чашек, например левой, лежит подряд несколько гири (больше одной): гири с весом  $k, k + 1, \dots, k + r, r > 0$ , причем  $k > 1, k + r < n$ . Тогда убираем с левой чашки гири  $k$  и  $k + r$ , а с правой — гири  $k - 1$  и  $k + r + 1$ . Задача решена.

Остается выяснить, можно ли разложить гири так, чтобы подобная ситуация не возникла. Действительно, может быть ситуация, когда на одной чашке лежат все легкие гири от 1 до  $m$ , а на правой — все тяжелые, от  $m + 1$  до  $n$ . Но это возможно, только если сумма всех чисел от 1 до  $n$  равна удвоенной сумме чисел от 1 до  $m$ . Такое, действительно, бывает — например, для чисел  $n = 20, m = 14$ . Поэтому ответ в случае б): нет, неверно.

Докажите самостоятельно, что есть еще только один случай, когда раскладка невозможна, а именно: на одной чашке находятся гири  $1, 2, \dots, m, m + 2$ , а на другой —  $m + 1, m + 3, m + 4, \dots, n$ .

Однако при  $n = 100$  ни та, ни другая раскладка не годится. Это и есть решение пункта а).

**22. Решение.** Поскольку при  $n = 1$  утверждение очевидно, можно применить индукцию. В частности, мы вправе считать, что если данную фигуру  $\Phi$  можно разбить на две части, одна из которых (а тем самым, и другая) состоит из четного числа клеток, то утверждение доказано.

Назовем «стволом» входящий в  $\Phi$  прямоугольник  $1 \times k$  максимальной длины  $k$ . Если выбросить ствол  $S$ , то  $\Phi$ , вообще говоря,

распадется на несколько частей, которые мы назовем ветвями, примыкающими к  $C$  справа и слева (мы считаем для определенности, что  $C$  расположен вертикально; сверху и снизу ветви к стволу, очевидно, примыкать не могут, иначе можно удлинить  $C$ ). Пусть число ветвей равно  $r$ . Докажите теперь, что:

1) случай  $r > k + 1$  невозможен, столько ветвей не уместится на стволе;

2) если  $r < k - 1$ , то можно каждую из ветвей разбить на прямоугольники так, чтобы общее число прямоугольников (включая ствол) не превышало  $n$  (даже если число клеток в ветви нечетно);

3) если  $r = k - 1$  или  $r = k + 1$ , то хотя бы одна из ветвей имеет четное число клеток, и можно ее отделить,

4) наконец, если  $r = k$ , то некоторые ветви примыкают к крайней (самой верхней или нижней) клетке ствола и можно их отрезать так, чтобы было отрезано четное число клеток.

**23. Идея решения.** Если это не так, то среднее число сторон грани слишком велико, и потому среднее значение внешнего угла слишком мало.

Оценим для начала среднее значение внешнего угла  $\alpha_{\text{ср}}$  для произвольного многогранника. Сумма углов при любой вершине  $A$  меньше  $2\pi$ , поэтому если в  $A$  сходится  $k$  углов, то сумма внешних углов больше  $(k - 2)\pi$ , а их среднее значение

$$\alpha_{\text{ср}}(A) > \frac{(k-2)\pi}{k} \geq \frac{\pi}{3}.$$

Поэтому и среднее значение по всем углам удовлетворяет тому же неравенству:  $\alpha_{\text{ср}} > \pi/3$ .

Допустим теперь, что у некоторого  $10n$ -гранника не более  $n$  граней — треугольники, не более  $n$  — четырехугольники и т. д. Тогда число сторон всех граней не меньше, чем  $(3 + 4 + \dots + 12)n = 75n$ . Сумма всех внешних углов равна  $20\pi n$ , поэтому среднее значение внешнего угла меньше  $20\pi n/75n = 4\pi/15 < \pi/3$ . Противоречие.

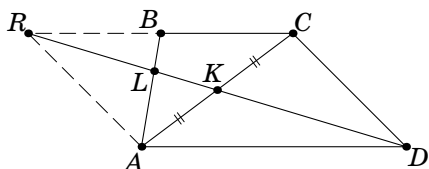
**Замечание.** Это доказательство проходит без изменений для  $kn$ -гранника, если  $k > 6$ .

**24. Ответ.** Нет.

**Решение.** Если  $n(n + 1) = m(m + 2)$ , то либо  $n > m$ , и тогда левая часть больше правой (первый множитель больше, а второй не меньше), либо  $n \leq m$ , и тогда левая часть меньше правой.

**25. Ответ.** 2/9.

**Указание.** Продлим  $DK$  до пересечения с продолжением стороны  $BC$  в точке  $R$ , тогда  $ADCR$  — параллелограмм. Его площадь, как и площадь трапеции, можно вычислить как произведение высоты на полусумму оснований, откуда легко следует, что она относится к площади трапеции, как  $4:3$ . Четырехугольник  $BCKL$  есть разность треугольников  $CKR$  и  $LBR$ .



**26. Решение.** б) Если вершины раскрашены в соответствии с условием, то имеется взаимно однозначное соответствие между красными и синими вершинами (каждая красная соединена ребром ровно с одной синей). Аналогично для зеленых. Поэтому число вершин каждого цвета одинаково.

а) При  $n$ , делящемся на 3, достаточно раскрасить вершины верхней грани в порядке КСЗКСЗ..., и нижние — в таком же. Есть и другие раскраски.

**27. Решение.** Все вершины куба делятся на две группы по 4 (вершины двух тетраэдров), причем все ребра соединяют вершины одной группы с вершинами другой (и никогда — вершины из одной группы). Поэтому задача легко решается, например, так: поставим в четырех вершинах простые числа (например, 2, 3, 5, 7), а в четырех других — их произведения по три, т.е. числа 30, 42, 70 и 105.

**28. Решение.** Площадь любого из четырех треугольников равна половине произведения двух отрезков диагоналей на синус угла между ними. Этот синус всегда один и тот же. Пусть отношение отрезков, на которые делится первая диагональ, равно  $a:b$ , а отрезков второй —  $c:d$ . Тогда площади четырех треугольников относятся как  $ac:ad:bd:bc$ . По условию,  $ac + bd = ad + bc$ , или  $a(c - d) = b(c - d)$ . Остальное очевидно.

**29. Ответ.** Нет. В самом деле, суммарное число точек равно  $6 \cdot 8 = 48$  (по 6 возле каждой вершины куба), тогда как сумма шести последовательных чисел всегда нечетна.

**30. Решение.** Поскольку при  $n = 1$  неравенство очевидно (оно обращается в равенство), применим индукцию по  $n$ . Обозначим

через  $L_n$  правую часть; по предположению индукции,  $L_n \geq 1^k + 2^k + \dots + n^k$ , и достаточно доказать, что  $L_{n+1} \geq L_n + (n+1)^k$ . Это неравенство доказывается прямой (хотя и несколько громоздкой) выкладкой.

**31. Указание. б)** Сумма первых  $10n + 1$  чисел равна

$$a_1 + (a_2 + \dots + a_{11}) + (a_{12} \dots + a_{21}) + \dots$$

Первое слагаемое не меняется, а каждое последующее положительно и, следовательно, не меньше 1. Таким образом, со временем сумма станет положительной.

**а)** Рассмотрим вначале периодическую последовательность:

$$-9, 1, 1, \dots, 1, -9, 1, 1, \dots, 1$$

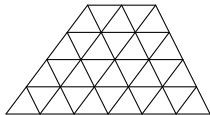
(после числа  $-9$  всякий раз идет девять единиц). Ясно, что сумма первых  $10n + 1$  чисел всегда равна  $-9$ , а сумма 10 идущих подряд чисел равна 0.

Остается немного подправить последовательность так, чтобы сумма 10 чисел подряд была положительна. Поскольку здесь, в отличие от пункта а), мы не связаны условием целочисленности, мы можем заменить 2-е число на 1,1; 12-е — на 1,01, 22-е — на 1,001 и т. д. Поскольку сумма  $0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots$  всегда меньше 1, новая последовательность удовлетворяет всем условиям.

**Ответ. а)** Да. **б)** Нет.

**32. Указание.** Домножьте уравнение на  $2 = (x+1) - (x-1)$ .

**33. Указание.** Разбиение проводится с помощью трех семейств прямых, параллельных двум боковым сторонам трапеции и ее основаниям (так же, как разбивают треугольник на подобные ему).



**34. Указание.**  $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$ .

**Ответ.** Окружность с тем же центром  $O$  и таким радиусом  $r$ , что  $r^2 = 2R^2 - OA^2$ .

**35. Решение.** Приведем сначала стратегию Глазка, позволяющую ему получить 54 монеты (является ли она наилучшей, несущественно). Глазок должен отдавать Хапку пригоршню, если в ней 5 монет или меньше, и забирать себе пригоршню, в которой 6 или больше монет. В момент окончания дележа либо у Хапка 9 пригоршней и, следовательно, не более 45 монет (у Глазка — 55), либо у Глазка 9 пригоршней и, следовательно, не менее 54 монет.

Отсюда ясно, что Хапок может рассчитывать, самое большое, на 46 монет. Докажите сами, что если он каждый раз берет по

6 монет, то независимо от того, будет ли Глазок придерживаться указанной стратегии или нет, Хапку обеспечено 46. Это и есть ответ.

**36. Указание.** Докажите сначала, что на черных и белых клетках стоит одно и то же число коней.

**Ответ.** 16 коней (надо оставить свободными 4 угловых клетки и «крест» из 5 клеток в центре).

**38. Решение.** Имеем:

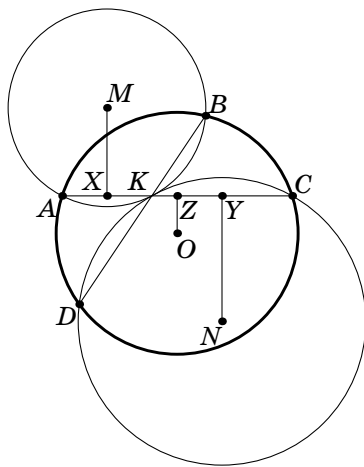
$$\frac{m + 2000n}{n + 2000m} = 2000 - \frac{(2000^2 - 1)m}{n + 2000m}.$$

Так как  $m$  взаимно просто с  $n$  и, следовательно, с  $n + 2000m$ , то  $d$  является делителем числа  $D = 2000^2 - 1$  и не превосходит его. Значение  $d = D$  достигается, например, если  $m = D - 1$ ,  $n = D + 2000$  (частное равно 2002/2001).

**39. Указание.** Разделим каждый из отрезков  $AK$ ,  $KC$  и  $AC$  пополам; пусть  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  — точки деления. Очевидно,  $XZ = KY$ .

Но  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  — это проекции на  $AC$  точек  $M$ ,  $N$  и  $O$  соответственно. Итак, проекции  $OM$  и  $KN$  на  $AC$  равны.

Точно так же доказываем, что равны их проекции на  $BD$ . Остальное уже несложно.



**40. Указание.** Если Петя никогда не берет пачку, начинающуюся с первой карты, то по индукции можно считать, что все карты, кроме первой, в конце концов лягут рубашкой вверх.

Если же он в какой-то момент взял эту карту, то после этого первая карта «навсегда» легла рубашкой вверх, и опять-таки можно применить индукцию.

**41. Подсказка.** Каждая из сумм равна площади многоугольника.

**Решение.** Прежде всего «снимем» ограничение относительно направлений сторон, и разрешим сторонам идти по линиям сетки, условившись при этом, что отрезки, лежащие на границе многоугольника, засчитываются с коэффициентом  $1/2$ .

Тогда легко видеть, что если многоугольник разрезан на несколько многоугольников, то каждая из сумм  $S_1$ ,  $S_2$  для всего многоугольника есть сумма соответствующих величин для слагаемых, не исключая и случая, когда некоторые линии разреза идут вертикально или горизонтально.

Дальнейший ход решения стандартен, следует:

1) представить любой многоугольник в виде объединения нескольких треугольников;

2) представить произвольный треугольник в виде объединения нескольких прямоугольных треугольников или, возможно, их «разности» (т. е. отрезать от одного прямоугольного треугольника другой прямоугольный так, чтобы получился нужный нам);

3) «в лоб» вычислить обе суммы для прямоугольных треугольников, у которых один катет вертикален, а другой горизонтален.

**42. Ответ.**  $N = 21$ .

**Указание.** 1) Для того чтобы убедиться, что 22 числа набрать нельзя, докажите, что среди натуральных чисел  $\zeta(2)$ ,  $\zeta(12)$  и  $\zeta(22)$  есть два последовательных. Отсюда следует, что одно из них нечетно.

2) Пример для  $n = 21$  строится так: в качестве первого числа возьмем  $(A - 1)99 \dots 989 = A \cdot 10^k - 11$  ( $A$  — многозначное число, у которого последняя цифра не 0; последние цифры получившегося числа — девятки, среди которых затесалась одна восьмерка). При этом числа  $\zeta(2)$ ,  $\dots$ ,  $\zeta(11)$  — последовательные натуральные, и числа  $\zeta(12)$ ,  $\dots$ ,  $\zeta(21)$  — тоже последовательные натуральные, причем  $\zeta(12) = \zeta(2) + 10 - 9k$ . Остается подобрать подходящую сумму цифр числа  $A$  и подходящее число девяток, при которых условие задачи будет выполнено.

**43. Предварительные соображения.** Составим для турнира с  $2n + 1$  участником такую таблицу: все партии результативны, и игрок с номером  $k$  выиграл у всех, кто имеет номер от  $k + n$



до  $k + 2n$  (считая, как обычно в таких случаях, по кругу: после числа  $2n + 1$  идет 1, затем 2 и т.д.). Таким образом, первый выиграл у всех от  $(n + 1)$ -го до  $(2n + 1)$ -го, второй — от  $(n + 2)$ -го до  $(2n + 1)$ -го, а также у первого, и т.д. При этом три четверти единиц в таблице результатов стоит ниже диагонали, и ровно четверть — выше.

Разумеется, эта таблица не годится, поскольку в ней все набрали поровну очков. Тем не менее, глядя на нее, нетрудно разобраться в обоих пунктах.

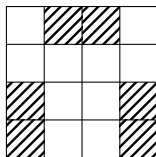
**Решение. а)** Упорядочим участников по числу набранных очков (как обычно и делают в таблицах), и разделим их на две половины: верхнюю (те, кто занял места с 1-го по  $(n/2)$ -е) и нижнюю. Здесь и далее мы пренебрегаем мелкими неточностями — что делать, если число участников нечетно, и т.п. Так как верхняя половина должна была набрать больше очков, чем нижняя, то игроки нижней половины выиграли у верхней меньше, чем проиграли, т.е. менее половины партий. Другая половина партий — т.е. не менее четверти от общего числа (партии между верхней и нижней половиной составляют около половины от общего числа партий) — это правильные партии.

**б)** С другой стороны, приведенная вначале таблица показывает, что число  $3/4$  достижимо, если все участники набрали очков поровну. Если число участников велико, то можно слегка поправить эту таблицу, добавив понемногу выигрышей в верхней части таблицы, но так, чтобы доля неправильных партий по-прежнему была близка к  $3/4$ .

## XXII Турнир городов (2000/01)

1. Ответ.  $S = 6$ .

**Решение.** Каждая клетка соседствует с одной (и только одной) из 6 клеток, заштрихованных на рисунке. Отсюда следует ответ.



**Замечание.** Попробуйте сами доказать, что задача имеет смысл, т.е. найти расстановку чисел, удовлетворяющую условию.

2. См. задачу XVIII.25.

3. **Решение. а)** Достаточно взять 8 самых больших чисел набора.

б) Предположим, что числа не равны. Вычтем из всех чисел наименьшее и после этого разделим их на их наибольший общий множитель, если таковой имеется; очевидно, при этом средние арифметические подвергаются такому же преобразованию.

Теперь среди наших чисел имеются как четные (число 0), так и нечетные. Поэтому можно выбрать 8 чисел так, чтобы их сумма была нечетной. Среднее арифметическое будет иметь вид  $(2n + 1)/8$ . Очевидно, среднее арифметическое девяти целых чисел не может иметь такой вид.

**Замечание.** Есть и другое решение, аналогичное пункту а), причем в нем не требуется, чтобы числа непременно были целыми. Однако оно наталкивается на некоторые технические трудности, которые хорошо видны из такого примера: допустим, что наибольшие числа набора — это числа  $N, N, \dots, N, N - 7, N - 8$ .

Теперь если мы возьмем просто 8 наибольших чисел (т.е. восемь чисел  $N$ ), то можно взять 9 чисел  $N$ , у которых то же среднее. Если же взять 7 чисел  $N$  и наибольшее из оставшихся, т.е. число  $N - 7$ , то и здесь можно подобрать 9 чисел с таким же средним. Попробуйте сами довести до конца решение этим путем.

5. **Указание.** Вычислите углы  $KLN$  и  $NML$  (как полусуммы дуг, на которые они опираются) и приравняйте получившуюся сумму к  $180^\circ$ .

6. **Решение.** Допустим противное, тогда  $ad - bc$  делится на собственный квадрат, а этого не может быть.

7. **Решение.** Очевидно, прямой угол годится; докажем, что других решений нет. В самом деле, боковое ребро призмы должно образовывать равные углы со всеми пятью сторонами основания

(при правильном выборе их направлений). Две пары из них могут быть параллельными, но среди них есть, во всяком случае, три непараллельных. Поэтому боковое ребро должно лежать сразу в двух биссекторных плоскостях, а они пересекаются только по прямой, перпендикулярной основанию.

**8. Решение.** а) Разложим вначале монеты поровну на чашки. Если весы при первом или одном из последующих взвешиваний в равновесии, то задача решена, поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только случай, когда одна из чашек перевесила. Пусть чашка  $A$  тяжелее. Очевидно, это возможно только в двух случаях: либо обе фальшивые монеты находятся на чашке  $A$  и тяжелее настоящих, либо обе — на чашке  $B$  и легче.

Переложим 8 монет с чашки  $A$  на  $B$ , и другие 8 — наоборот. Пусть опять перевесила чашка  $A$ . Это значит, что обе фальшивые монеты остались там, где были. Следовательно, 16 переложенных монет — настоящие. Отложим их в сторону; они уже разделены на равные по весу кучки, и нужно только разделить 16 оставшихся. (Случай, когда во второй раз перевесила чашка  $B$ , аналогичен, только надо отложить в сторону другие 16 монет.)

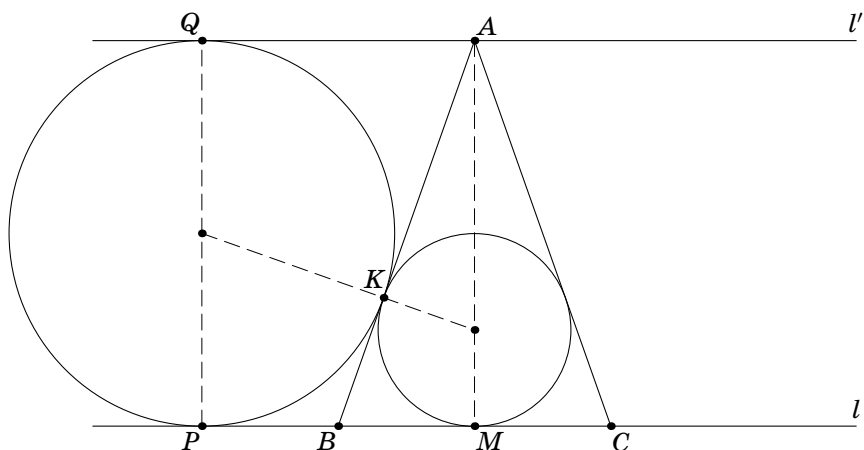
После третьего взвешивания мы сможем аналогичным образом отложить в сторону еще 8 монет, а после 4-го — еще 4. На чашках осталось 4 монеты, и либо на одной — две фальшивые тяжелые, либо на другой — две фальшивые легкие. Что из двух верно, неизвестно: но в любом случае, взяв по одной монете с чашек  $A$  и  $B$ , мы получаем равные по весу кучки.

**Решение задачи б)** аналогично, только на втором шаге надо переложить не 8 и 8, а 3 и 3 монеты. Если после этого по-прежнему перевесила чашка  $A$ , то мы откладываем в сторону 6 монет и далее действуем, как раньше; если же  $B$  тяжелее, то фальшивые монеты — среди шести оставшихся, и все еще проще.

**Замечание.** Задача а) имеет и другое решение: занумеровать монеты наборами из четырех букв  $A$  или  $B$  (таких наборов 16, например,  $ABBA$ , так что каждый номер получают 2 монеты), и провести 4 взвешивания: при первом положить монеты на чашки согласно первой букве номера, и т. д. Однако этот способ труднее обобщить на 22 монеты.

**9. Решение.** Пусть  $m$  — наименьшее число в таблице. Ясно, что оно было отмечено и в первый, и во второй раз. Вычеркнем из таблицы строку и столбец, в которых стоит число  $m$ . По условию, при этом не вычеркнуто ни одно из отмеченных чисел. Далее — по индукции.

**10. Решение.** Пусть  $P$ ,  $Q$  — точки касания данной окружности с прямыми  $l$  и  $l'$ , и пусть  $M$  — точка касания вписанной окружности с  $l$ . Таким образом,  $M$  — середина  $BC$ , и  $AMPQ$  — прямоугольник. Треугольники  $KAQ$  и  $KBM$  подобны (почему?), и коэффициент их подобия  $\lambda$  равен отношению радиусов двух окружностей. С другой стороны, из свойств касательных следует, что  $BP = BK = BM$ , т. е.  $BM = PM/2 = AQ/2$ . Отсюда сразу следует, что  $\lambda = 1/2$ .



**Ответ.**  $1/2$ .

**11. Указание.** Если разделить каждое из чисел на их сумму, то получится разложение единицы в сумму дробей вида

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}.$$

Этих разложений не так много, и если еще предположить, что среди дробей нет ни  $1/3$ , ни  $1/5$ , то перебор остается минимальный.

**12. Решение.** Очевидно, есть 64 «стандартных» способа раскраски: доска раскрашивается обычным образом (это можно сделать двумя способами), и одна из 32 черных клеток перекрашивается в белый цвет. Кроме того, есть 4 нестандартных способа, связанных с углами доски (например: на доске, закрашенной обычным образом, клетка a8 перекрашивается в черный цвет, а клетки a7 и b8 — в белый). Докажем, что других способов нет.

Для этого разобьем доску на 16 квадратов  $2 \times 2$ . В одном из них (назовем его «особым») будет одна черная клетка, а в каждом из остальных — по 2. Ясно, что каждый неособый квадрат закрашивается обычным образом (одним из двух). При этом, если два неособых квадрата стоят рядом, то их раскраски должны быть согласованы. Поскольку из любого неособого квадрата, перейдя несколько раз в соседний неособый, можно добраться до любого, то получается, что раскраска всех неособых квадратов согласована: вся доска, кроме особого квадрата, закрашена одним из двух обычных способов.

Остается убедиться в том, что если особый квадрат стоит не в углу, то и его придется закрасить обычным способом (и перекрасить одну из его черных клеток в белый цвет), а если он угловой, то имеется еще одна возможность, которая также была рассмотрена выше.

**Ответ. 68.**

**13. Решение.** Разложим число 11 111 по степеням двойки:

$$11\,111 = 8192 + 2048 + 512 + 256 + 64 + 32 + 4 + 2 + 1.$$

Отсюда понятно, что гири можно разложить следующим образом:

$$\begin{aligned} 11\,111 = (16\,384 - 8192) + (4096 - 2048) + (1024 - 512) + \\ + 256 + (128 - 64) + 32 + (16 - 8 - 4) + 2 + 1 \end{aligned}$$

(знак плюс соответствует левой чашке, знак минус — правой; гиря 16 лежит на левой чашке). Докажите теперь, что при любой другой раскладке, приводящей к равновесию, гири от 1 до 8192 лежат именно так, как указано (для гири 16 384 и последующих это, вообще говоря, неверно).

**14. Решение.** Очевидно, что никто не мог решить 6 или 5 задач. Допустим, некий школьник А решил 4 задачи. Тогда никто не решил 5-ю и 6-ю одновременно; следовательно, каждую из них решило по 1000 человек, и всего участников не менее  $1 + 1000 + 1000 = 2001$ . Если же каждый решил не более трех задач, то (поскольку всего решено 6000 «человеко-задач») число участников не меньше 2000. Это и есть **ответ** (как и следовало ожидать, учитывая год проведения Турнира).

Остается привести пример для 2000 участников. Разобьем их на 10 групп по 200 человек, и пусть каждая группа решила определенную тройку задач, например:

|                        |           |
|------------------------|-----------|
| I группа решила задачи | 1, 2, 6;  |
| II группа —            | 2, 3, 6;  |
| III —                  | 3, 4, 6;  |
| IV —                   | 4, 5, 6;  |
| V —                    | 5, 1, 6;  |
| VI —                   | 1, 2, 4;  |
| VII —                  | 1, 3, 4;  |
| VIII —                 | 1, 3, 5;  |
| IX —                   | 2, 3, 5 и |
| X —                    | 2, 4, 5.  |

Условие задачи выполнено.

**Замечание.** При подборе троек используется тот факт, что  $C_6^3 = 20$ . Требуется взять ровно половину всех троек (т.е. 10) с таким расчетом, чтобы никакие две не «покрыли» все 6 задач.

**15. Решение.** Поскольку в каждом равенстве участвует не менее 3 чисел, ясно, что максимум — 66. Получить 66 равенств можно, например, следующим способом. Запишем 50 равенств вида

$$(2k - 1) + (202 - 4k) = 201 - 2k, \quad k = 1, 2, \dots, 50,$$

начиная с  $1 + 198 = 199$ ,  $3 + 194 = 197$ , и до  $99 + 2 = 101$ . В них вошли все числа, кроме делящихся на 4.

Теперь итерируем этот процесс: разделим все числа 4, 8, ..., 200 на 4, и из полученных чисел от 1 до 50 аналогично запишем 12 равенств вида  $(2k - 1) + (50 - 4k) = 49 - 2k$ :  $1 + 46 = 47$ ,  $3 + 42 = 43$ , ...,  $23 + 2 = 25$  (числа 49, 50 не использованы). Умножив их почленно на 4, мы получим недостающие 12 равенств среди чисел 1, ..., 200; неиспользованными остались 12 чисел, делящихся на 16, да еще два числа 196, 200, которые так и остаются без дела.

С оставшимися 12 числами мы поступаем точно так же: делим их на 16 и составляем из чисел 1, ..., 12 три равенства:  $1 + 10 = 11$ ,  $3 + 6 = 9$ ,  $5 + 2 = 7$ . Осталось три числа, из которых четвертой итерацией мы получаем последнее равенство. Общее их число равно  $50 + 12 + 3 + 1 = 66$ , что и требуется.

**Замечание.** На Турнире городов эта задача давалась не для 200, а для 100 чисел. Для ста чисел на первом шаге по приведенной схеме точно так же строится 25 равенств из всех чисел, не делящихся на 4, но дальше приведенное решение не проходит (как нетрудно проверить, этим способом удастся построить только 32 равенства). Поэтому приходится идти более унылым путем, и подбором составить 8 равенств из чисел

1, ..., 25. Годаются, например, равенства

$$1 + 12 = 13, \quad 2 + 19 = 21, \quad 3 + 17 = 20, \quad 4 + 18 = 22,$$

$$5 + 6 = 11, \quad 8 + 16 = 24, \quad 9 + 14 = 23, \quad 10 + 15 = 25$$

(число 7 осталось лишним).

**17. Указание.** Эти точки обязаны лежать в некоторой плоскости, которая пересекает все 6 граней или только часть их по прямым. На каждой из прямых — не более 2 точек.

**Ответ. 12.**

**18. Указание.** Вектор  $\overrightarrow{B_1A_1}$  является суммой трех векторов длины  $c$ , которые направлены параллельно сторонам данного треугольника. Аналогично для вектора  $\overrightarrow{C_2B_2}$ , только здесь слагаемые имеют длину  $a$ .

**Ответ.  $c : a$ .**

**19. набросок решения.** б) Если  $n = 2$ , то, избавляясь от знаменателей, мы получаем квадратное уравнение со старшим коэффициентом  $a_2 \neq 0$ , поэтому это не тождество. При  $n = 4$  один из возможных ответов:  $a_1 = a_3 = -2$ ,  $a_2 = a_4 = 1$ .

а) Основная идея решения: при нечетном  $n$  функция является кусочно убывающей.

Уточним эту идею. Функция  $y = a + 1/x$  определена всюду, кроме одной точки, принимает все значения, кроме одного, и является убывающей на каждом интервале, где она определена. Отсюда легко следует, что функция  $f_n(x)$ , равная левой части написанного равенства, определена на конечном числе интервалов, в совокупности образующих почти всю числовую прямую (т.е. определена всюду, кроме конечного числа точек), и на каждом из интервалов она непрерывна и является убывающей или возрастающей, в зависимости от четности  $n$ .

**20. Решение.** Пусть доска покрашена в красный и черный цвет; для произвольного ряда обозначим через  $K$  число красных и через  $Ч$  число черных клеток. Предположим, что для некоторого ряда  $K \neq Ч$ ; выберем ряд, где их разность максимальна. Пусть для определенности это первая строка, и пусть в ней  $r$  красных и  $k + r$  черных клеток,  $k$  максимально по всем строкам и столбцам.

Тогда на доске красных клеток больше, чем черных. В самом деле, если в столбце на первом месте стоит черная клетка (таких столбцов имеется  $k + r$ ), то разность  $K - Ч$  в этом столбце, как минимум, равна  $k$  (иначе для этой клетки не выполнено условие задачи). В остальных столбцах  $Ч - K \leq k$  по предположению.

Поскольку столбцов первого типа больше, мы видим, что, во-первых, красных клеток больше, чем черных, и во-вторых, есть столбец, в котором  $K - Ч \geq k$ . Теперь, повторяя то же рассуждение и заменив столбцы на строки, мы видим, что черных клеток больше, чем красных. Противоречие.

**21. Решение.** Отрицательный ответ вроде бы очевиден, но хотелось бы еще это доказать.

Основная идея решения. У «толстой» фигуры (а наша фигура во всех трех вариантах имеет толщину не меньше единицы) периметр не может быть намного больше, чем площадь.

Оформление этой идеи: для произвольного многоугольника  $P$  построим прямоугольник, одной из сторон которого является любая сторона  $P$ , а другая отложена внутрь  $P$  и имеет длину  $d$ . Объединение всех этих прямоугольников назовем «бахромой»  $P$ .

Пусть теперь  $P$  — фигура из любой из задач а)–в), и примем, например, что  $d = 0,1$ .

Очевидно, бахрома целиком лежит внутри  $P$ , так что ее площадь  $S$  меньше площади  $P$ . С другой стороны,  $2S$  не меньше периметра (никакие три куса бахромы не имеют общих точек; два куска могут иметь общие точки вблизи вершины). Отсюда немедленно следует отрицательный ответ во всех трех случаях (причем каждую из оценок можно существенно усилить).

**Другое решение задачи а).** Рассмотрим круг радиуса 2 с центром в центре гвоздя. Очевидно,  $P$  целиком лежит внутри круга. Спроектируем границу  $P$  на границу круга; легко оценить угол, который любой из отрезков границы образует с радиусом, выпущенным из центра, и вывести отсюда, что при проектировании длина каждого отрезка уменьшилась менее чем в 100 раз.

**22. Указание.** Заметьте прежде всего, что  $n$  всегда можно заменить на  $(n - 1) \cdot 1 = n - 1$ . С другой стороны, если двигаться в обратную сторону и заменять не сумму на произведение, а произведение на сумму, то легко уменьшить число 2001 (например: сначала до  $670 = 3 + 667$ , затем до  $77 = 67 + 10$ , и т. д.) Тем самым мы сделаем его меньше 22, а затем увеличим несколько раз на единицу.

**Ответ.** Можно.

**23. Указание.** Пусть средняя линия треугольника  $ABC$  параллельна стороне  $AB$ . Рассмотрите по отдельности два случая:

- 1) медиана выпущена из вершины  $C$ ;
- 2) медиана выпущена из  $A$  или  $B$ .



**24. Ответ.** Да, могла.

**Решение.** Для этого нужно, чтобы после первого покупателя осталось  $10/11$  всего сыра, после второго —  $10/12$ , после третьего —  $10/13$  и т. д. Так как эти дроби убывают, то противоречий не возникнет. После десятой покупки должна остаться половина всего сыра, т. е. 10 кг.

**25. Решение.** а) Нет, неверно. Предположим, что наши треугольники «длинные»: например, один из углов составляет  $178^\circ$ , два — по одному. Если они к тому же повернуты один относительно другого, то ясно, что покрыть не удастся.

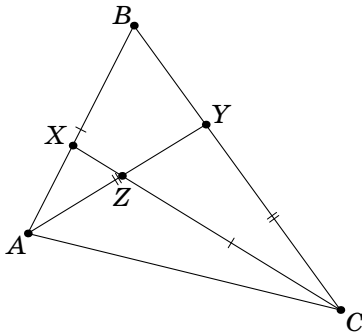
б) Разобьем наш треугольник средними линиями на 4 маленьких. Опишем вокруг каждого из них окружность. Соответствующие круги по размеру соответствуют кругу, вписанному в большой треугольник, и поэтому каждый круг, а вместе с ним и маленький треугольник, можно накрыть одним большим треугольником.

**26. Указание.** Вначале сумма номеров строк и номеров столбцов всех ладей равнялась  $2(1 + 2 + \dots + 15)$ , т. е. была четной. При перестановке каждое из слагаемых изменилось на нечетное число, поэтому сумма стала нечетной.

**27. Решение.** Двигаясь со «средней» скоростью, автобус прибудет в конечный пункт через 6 часов 40 минут после отправления. Это соответствует скорости 15 км в час. Поэтому в интересующий нас момент осталось пройти 15 км, а пройдено 85 км.

**28. Ответ.** Нет. Если в числе  $a$  не более 500 цифр, то в числе  $a^3$  — не более 1500. Если же в числе  $a$  501 цифра (или больше), то в  $a^3$  — не менее 1501.

**29. Решение.** Согласно условию, в треугольниках  $AYB$  и  $CYZ$  по две пары равных сторон. Кроме того, синусы углов  $AYB$  и  $AYC$



тоже равны (углы дополняют друг друга до  $180^\circ$ ). Применяя теорему синусов, мы легко убеждаемся в том, что  $\angle B = \angle YZC$ . Отсюда  $\angle B + \angle YZX = 180^\circ$ , что и требуется.

**30. Решение.** Выигрышная стратегия первого: ставить доминошки на среднюю горизонталь, пока это возможно. Легко убедиться, что при минимальной аккуратности он сможет сделать не менее 25 таких ходов. Этим он, с одной стороны, перекрывает противнику 50 вертикалей (следовательно, второй сделает в партии не более 50 ходов), а с другой — обеспечивает себе возможность впоследствии сделать еще 50 ходов (поставить еще по 2 доминошки параллельно каждой уже поставленной). Таким образом, у второго ходы будут исчерпаны значительно раньше.

**31. Решение.** Проведем в тетраэдре 4 «средние плоскости»: одну через средние линии трех граней, прилегающих к вершине  $A$ , чтобы отсечь от тетраэдра такой же половинного размера, и еще три аналогично. Рассмотрим на поверхности исходного тетраэдра 8 областей: четыре, соответствующих четырем отсеченным тетраэдрам, а остальные 4 — равносторонние треугольники со стороной 0,5, оставшиеся на гранях исходного. В одной из этих частей лежит не менее 2 из наших точек. Легко видеть, что расстояние между ними не больше 0,5.

**32. Ответ.** Да, может.

**33. Ответ.** Нет, нельзя.

**Подсказка.** После первого объединения в обеих образовавшихся кучах число камней делится либо на 7, либо на 5, либо на 3.

**34. Решение.** 1) Стороны данного угла являются биссектрисами внешних углов треугольника  $ABC$ . Поэтому точка  $M$  является центром вневписанной окружности для  $\triangle ABC$ , и лежит на биссектрисе угла  $BAC$ .

2) Восставим из точек  $B$  и  $C$  перпендикуляры к сторонам угла. Они являются биссектрисами внутренних углов треугольника  $ABC$ , поэтому точка их пересечения  $N$  также лежит на биссектрисе  $\angle BAC$ , т. е. на прямой  $AM$ .

3) Углы  $MBN$  и  $MCN$  — прямые. Поэтому точки  $M, B, N, C$  лежат на одной окружности, причем  $MN$  — диаметр этой окружности. Следовательно, центр окружности  $O$  лежит на диаметре  $MN$ , т. е. на  $MA$ , что и требовалось.

**35. Решение.** Да. Прежде всего, к некоторым вершинам при-  
мыкает только один треугольник — значит, из них диагонали не

проводили. Соответствующие треугольники получились, когда соединили ближайшие к ним вершины (например, если возле вершин  $A, B, C, D$  написаны числа 5, 8, 1, 3, то треугольник получен соединением вершин  $B$  и  $D$ ). Проведя эти диагонали, мы можем теперь отбросить «единичные» вершины, изменить соответствующим образом числа возле остальных (в нашем примере останутся вершины  $A, B, D$  и числа 5, 7, 2) и продолжать, пока все вершины не будут исчерпаны.

**36. Ответ.** а), б) Невозможно.

**Решение.** В самом деле, если в какой-то момент фишки стоят на полях разного цвета («разноцветная позиция»), то после хода — кто бы ни ходил — они окажутся на полях одного цвета («одноцветная»), так что разноцветные и одноцветные позиции чередуются. Но одноцветных пар полей имеется  $64 \times 31$ , а разноцветных —  $64 \times 32$ , поэтому когда все одноцветные пары встретятся, останется еще некоторое число неиспользованных разноцветных пар полей.

**37. Указание.** Рассмотрите, например, треугольник  $АН_ВН_С$ . Две высоты в нем параллельны высотам треугольника  $АВС$ . Отсюда вытекает, что отрезки этих четырех высот образуют параллелограмм с вершинами  $Н_В, Н, Н_С$  и  $Н'$  ( $Н$  — ортоцентр треугольника  $АВС$ ,  $Н'$  — ортоцентр треугольника  $АН_ВН_С$ ).

Обозначим векторы  $\overrightarrow{НН_А}, \overrightarrow{НН_В}$  и  $\overrightarrow{НН_С}$  через  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ . Тогда  $\overrightarrow{НН'} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ .

Аналогичные формулы, разумеется, справедливы для треугольников  $АН_АН_В$  и  $АН_АН_С$ . Отсюда немедленно вытекает, что стороны обоих треугольников, равенство которых требуется доказать в задаче, равны  $\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{w}$  и  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ .

**38. План решения.** Расставим числа до 10 до 99 в таблицу размером  $10 \times 9$  в естественном порядке. После одной попытки ответ «тепло» получается не более чем в 5 случаях, а именно, для клеток, расположенных «крестом» с центром в предложенном числе. Чтобы гарантировать положительный результат, необходимо, чтобы кресты заполнили всю таблицу, разве что за исключением одной клетки (в этом случае, если все ответы «холодно», то искомая клетка — оставшаяся).

**Решение.** а) Чтобы гарантировать успех за 18 попыток, нужно заполнить 18 крестами 89 клеток. Это невозможно (учтите, что часть крестов «вылезает» на край таблицы).

**б), в)** Ответ положительный. Для 24 попыток заполнить таблицу крестами сравнительно легко, а для 22 следует действовать очень аккуратно (в частности, оказывается даже, что важно, в каком порядке называть числа).

**Замечание.** Аналогичная задача была синхронно дана в 2001 году на ММО, однако с небольшим нюансом: «успехом» там считалось получение ответа «тепло». Это облегчает решение (достаточно получить ответ «тепло» на 22-м шаге, а то, что при этом не удастся узнать число, — неважно).

**39. Решение.** Рассмотрим произвольный нечетный многочлен  $Q(y)$  (таким образом,  $Q(y) + Q(-y) = 0$ ), добавим к нему половинку:  $R(y) = Q(y) + 1/2$ ; теперь  $R(y) + R(-y) = 1$ . Теперь замена переменной  $y = 2x - 1$  дает нужный многочлен  $P(x)$ .

**40. Решение.** Ранжируем учеников по количеству двоек. Ученик  $A$ , получивший максимальное число двоек, получает ранг 0. Четверым, получившим больше всех двоек после  $A$ , присвоим ранг 1, следующим 16 — ранг 2 и т. д.

Ранг 0 и 1 присвоен пятерым, следовательно,  $A$  получил не менее 80 % двоек среди этой группы. Пусть  $A$  получил  $N$  двоек, тогда двоечники ранга 1 получили в сумме не более чем  $N/4$  двоек.

Двоечников ранга 1 и 2 — 20 человек (или, возможно, меньше, если в классе менее 20 учеников), во всяком случае, 4 двоечника ранга 1 получили в этой группе не менее 80 % двоек, а все двоечники ранга 2 — не более чем  $N/16$  двоек. Аналогично двоечники ранга 3 получили не более чем  $N/64$  двоек, и т. д. Таким образом, все ученики кроме  $A$  получили не более чем  $N/4 + N/16 + N/64 + \dots < N/3$  двоек, что и требуется.

**42. Решение.** Из условия следует, что и нули, и единицы образуют в любой из таблиц  $A, B$  два неких «неправильных треугольника», разделенных ломаной, спускающейся вниз и влево, так что нули заполняют левый верхний угол, а единицы — правый нижний.

Возьмем произвольное  $l$ , и пусть  $m$  — номер последнего нуля в  $l$ -м столбце. Проведем горизонтальную и вертикальную линии, разграничивающие таблицу на четыре части, как на рисунке.

|     |     |
|-----|-----|
| $P$ | $Q$ |
| $R$ | $S$ |

Слева отгорожено  $l$  столбцов, сверху —  $m$  строк. Тогда часть  $P$  как в  $A$ , так и в  $B$  состоит из одних нулей,  $S$  — из одних единиц. Согласно условию, в таблице  $A$  часть  $Q$  содержит не меньше единиц, чем в  $B$ . Поэтому часть  $R$  содержит не больше единиц.

**Замечание.** Еще одна задача стиля «главное — понять условие».

**43. Ответ.** Нет (в обоих случаях).

**Решение.** а) Пусть  $n + 1$  — число участников,  $S_k$  — сумма очков  $k$ -го участника и  $a_k$  — разность между числами, указанными в условии. Докажем, что  $A = \sum A_k \leq 0$ .

Пусть  $a_k$  и  $b_k$  — число выигранных и проигранных  $k$ -м участниками партий соответственно, тогда  $S_k = (n + a_k - b_k)/2$ . Это число входит в общую сумму  $A$  несколько раз, а именно  $b_k$  раз, со знаком плюс и несколько раз, а именно  $a_k$  раз — со знаком минус. Разбивая  $S_k$  на два слагаемых — постоянное  $n/2$  и переменное  $(a_k - b_k)/2$ , мы видим, что

$$A = \frac{n}{2} \cdot \sum (b_k - a_k) + \sum \frac{(a_k - b_k)(b_k - a_k)}{2}.$$

Первое слагаемое равно 0 в силу того, что на каждый выигрыш одного из участников приходится проигрыш другого, т. е.  $\sum a_k = \sum b_k$ , а второе очевидным образом неположительно (оно может равняться нулю в том и только в том случае, когда каждый из участников проиграл и выиграл одинаковое число партий, т. е. набрал ровно половину возможных очков).

б) Докажем, что  $\sum S_k \cdot a_k = 0$ . Поскольку все  $S_k$  положительны, это означает, что среди  $a_k$  имеются как положительные, так и отрицательные.

В самом деле, будем рассуждать так. Поскольку  $a_k$  состоит из слагаемых  $S_r$ , которые идут со знаками плюс и минус, то и вся сумма состоит из слагаемых  $\pm S_k S_r$ . Если  $k$ -й игрок выиграл у  $r$ -го, то такое слагаемое входит в общую сумму дважды — со знаком плюс в  $S_k a_k$  и со знаком минус в  $S_r a_r$ . Если же они сыграли вничью, то такое слагаемое не входит в сумму вовсе. Так или иначе, все слагаемые взаимно уничтожаются, и сумма равна нулю.

Заметим, кстати, что это решение проходит и в случае задачи а).

**44. набросок решения.** Технически трудная задача. Ясно, прежде всего, что число 2001 здесь роли не играет и что на самом деле надо строить подходящий набор из  $N$  многогранников для произвольного  $N$ .

Идея построения такова: возьмем бесконечный конус, выберем  $N$  различных его образующих и выпустим из какой-нибудь внутренней его точки  $N$  лучей, параллельных этим образующим. Затем построим вокруг каждого из этих лучей достаточно длинную косую призму, боковые стороны которой параллельны лучу, а в основании лежит некоторый многоугольник, который надо аккуратно подбирать. Ясно, что эти призмы пересекаются в нижней части конуса, а затем расходятся навсегда. Теперь, чтобы получить правильную конструкцию, нужно каждую из призм «срезать» снизу так, чтобы у первой нижнее основание находилось (скажем условно) на расстоянии 1 от вершины, у второй — на расстоянии 10, у третьей — 1000 и т. д. Если при этом еще правильно выбрать многоугольники, лежащие в основаниях призм, то условие задачи будет выполнено.

Подробное решение см. в книге «Московские математические олимпиады»<sup>1</sup> (2001 год, 11 класс).

**45. Решение.** а) Поскольку положений лишь конечное число, ясно, что в какой-то момент повторится положение шариков, которое уже было, причем ход нужно будет делать с той же коробочки. Теперь остается заметить, что все ходы, начиная с первого, определены однозначно (в отличие от пункта б)), и существует «обратный ход»: по позиции, возникшей после очередного хода, можно определить предыдущую позицию. Поэтому если совпадает позиция после  $k$ -го и  $r$ -го хода, то начальная позиция совпадает с  $(r - k)$ -й.

б) **Ответ.** Да, это возможно.

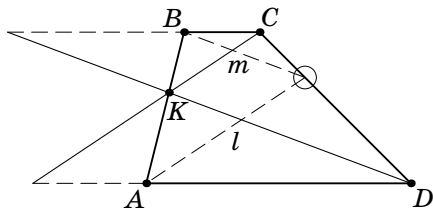
**Указание.** Поскольку ходы, как указано в пункте а), обратимы, достаточно доказать, что из любой позиции можно получить какую-то определенную, например — позицию, в которой все шарики собраны в первой коробочке.

---

<sup>1</sup>Под редакцией В. М. Тихомирова. М.: МЦНМО, 2008.

## XXIII Турнир городов (2001/02)

**1. Указание.** Продолжив прямые  $CK$  и  $DK$  до пересечения с основаниями трапеции, мы получаем несколько подобных треугольников. Далее следует воспользоваться тем, что в подобных треугольниках отношения соответствующих сторон равны.



**2. Решение.** Произведение первых  $m$  четных чисел равно  $m! \cdot 2^m$ . Ясно, что должно быть  $n > m$ , и равенство означало бы, что

$$2^m = (m+1) \cdot (m+2) \cdot \dots \cdot n.$$

Если в последнем произведении хотя бы два сомножителя, то один из них нечетный, и равенство исключено. Остается проверить возможность  $n = m+1 = 2^m$ . Но это возможно только при  $m = 1$ , что противоречит условию.

**3. Указание.** Пусть  $a, b, c, d$  — монеты. Первым взвешиванием кладем по 2 монеты на каждую чашку ( $a, b$  против  $c, d$ ). Если одна чашка перевесила, то второе взвешивание —  $a, c$  против  $b, d$ . Если же весы в равновесии, то второе взвешивание —  $a$  против  $b$  (по одной монете).

**Ответ.** Это возможно.

**4. Указание.** Ситуация такая же, как если бы шарики «пролетели насквозь друг через друга», а в этом случае ясно, что произойдет 25 «пролетов».

**Ответ.** 25.

**5. Ответ.** Нет, неверно.

**Построение контрпримера.** Расположим точки  $A, B, C$  вдоль одной прямой, а точку  $D$  вне этой прямой так, чтобы выполнялись равенства  $AC = AD = a$ ,  $AB = BD = CD = b$ . Выясните самостоятельно, но, при каком соотношении между числами  $a$  и  $b$  это возможно.

**Замечание.** Условию задачи «удовлетворяют» также 4 вершины правильного тетраэдра. Слово «удовлетворяют» взято в кавычки, поскольку в задаче все-таки требуется, чтобы точки лежали на плоскости, а не в пространстве. Но «зато» никакие три из этих точек не лежат на одной прямой. Попробуйте сами выяснить, существует ли расположение точек, удовлетворяющих условию задачи, при котором все точки лежат на плоскости и никакие три не лежат на одной прямой.

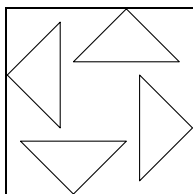
**6. Указание.** Докажите сначала, что все пять треугольников

$$A_1A_3A_4, \quad A_2A_4A_5, \quad A_3A_3A_1, \quad A_4A_1A_2, \quad A_5A_2A_3$$

- 1) равнобедренные;
- 2) равны между собой.

**7. Решение.** Да, существуют. Для доказательства достаточно последовательно рассмотреть наборы чисел: до 1 до 1000; от 2 до 1001; от 3 до 1002 и т. д. Первый набор содержит намного больше 5 простых чисел, один из последующих — ни одного. Остается доказать «непрерывность» количества простых чисел как функции от  $n$  в наборе  $[n, n + 999]$  (точнее — что при сдвиге  $n \rightarrow n + 1$  число простых меняется не более чем на 1).

**9. Ответ.** Не всегда. Пример показан на рисунке.



**Замечание.** Аналогичным способом нетрудно построить пример для трех шоколадок. Только при двух шоколадках разрезать торт можно всегда.

**10. Ответ.** Нет, невозможно. В самом деле, из условия следует, что три ладьи в любой момент времени должны занимать три из четырех вершин некоторого прямоугольника (сам этот прямоугольник может меняться, например, легко перевести все три ладьи из данного угла в соседний, а затем в противоположный). Поэтому если занумеровать ладьи (123), то в любой момент они будут образовывать *четную перестановку*. При симметрии же они должны образовать *нечетную перестановку* (132).



**12. Решение.** Пусть имеется  $A$  дуг длины  $a$ ,  $B$  дуг длины  $b$  и  $C$  дуг длины  $c$ . Длина дуги, соответствующей любой стороне любого из двух  $N$ -угольников равна одному из трех чисел:  $a + b$ ,  $a + c$  или  $b + c$ . Пусть стороны красного  $N$ -угольника стягивают  $x$  дуг первого типа,  $y$  — второго и  $z$  — третьего. Тогда  $x + y = A$ ,  $x + z = B$  и  $y + z = C$ , и эти уравнения нетрудно решить относительно  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (например,  $2x = A + B - C$ ). Для синего многоугольника соответствующие числа  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  удовлетворяют тем же уравнениям, и потому равны  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Отсюда видно, что периметры равны. Равенство площадей сразу получится, если каждый  $N$ -угольник — синий и красный — разбить на соответствующие  $N$  секторов. Их площади равны почленно.

**13. Указание.** Для начала запишите числа в два добавленных столбца как попало, соблюдая только правило: в каждой строке все числа различны. Тогда наша задача превращается в такую: имеется таблица  $2 \times n$ , в ней каждое число от 1 до  $n$  записано дважды, притом в разных строках. Остается только доказать, что в такой таблице можно в некоторых строках поменять числа местами так, чтобы в каждом из двух столбцов стояли числа от 1 до  $n$ .

**14. Решение.** Сторон многоугольника на 2 больше, чем треугольников. Поэтому имеется не менее двух треугольников, в которые входят две стороны исходного многоугольника, и они равнобедренные. Допустим, что в каждый из оставшихся треугольников входит не более одной стороны многоугольника; тогда в каждый из них входит ровно одна сторона и 2 диагонали. Чтобы доказать существование третьего равнобедренного, достаточно рассмотреть те два треугольника, которые примыкают к наибольшей диагонали (из использованных при разбиении).

**15. Ответ.** 63 ладьи.

**Указание.** После того как поставлено 3 угловых ладьи, четвертую поставить уже не удастся. Чтобы поставить 63, нужно сначала заполнить три угла ( $a_8$ ,  $h_8$  и  $h_1$ ), а затем всю первую строку, кроме угловой клетки  $a_1$ . Дальнейшее несложно.

**16. Решение.** Пусть записано  $n$  чисел. Запишем  $(n - 1)$ -значное число  $A = 122 \dots 12$ , где цифры выбираются по правилу: на  $k$ -м месте ставим 1, если  $k$ -е число меньше своего правого соседа, и 2 — если оно больше. При перемене местами двух чисел на соответствующем месте двойка меняется на единицу, и сверх того, возможно, следующая единица меняется на двойку (например,

если были написаны числа 11, 4, 15, то им соответствовала последовательность 21, а после перестановки получилось 8, 22, 15, т. е. 12).

Ясно, что при каждой перестановке число  $A$  уменьшается, и в конце концов оно станет равным  $11 \dots 1$ , т. е. числа построены в порядке возрастания.

**17. Решение.** Добавим к этим числам еще нулевую степень двойки, т. е. единицу (на результат это, конечно, не влияет) и разобьем все эти 334 числа на 101 класс, в соответствии с числом цифр. В каждом классе, кроме последнего, 3 или 4 числа, а в последнем — одно. Очевидно, что каждый раз при «перескоке» в следующий класс появляется ровно одно число, начинающееся с 1, и поэтому имеется 101 число, начинающееся с 1. Вслед за таким числом идут числа, первые цифры которых либо равны 2, 4 (и в этом случае следующее число также остается в том же классе), либо (2, 5), (3, 6) или (3, 7) (во всех этих случаях в данном классе только 3 числа).

Если бы в каждом классе было только по 3 числа, то всего чисел было бы 301, а не 334. Соответственно имеется 33 четверки.

**Ответ.** 33.

**18. Указание.** Какую бы прямую мы ни провели через  $O$ , ни красные, ни синие точки не могут лежать в одной полуплоскости относительно нее.

Проведем такую окружность  $W$  с центром  $O$ , что все красные точки лежат внутри  $W$ , а все синие — вне ее. Проведем произвольную окружность  $U$ . Если она не пересекается с  $W$ , то на ней заведомо не лежат либо красные, либо синие точки. Если же окружность  $U$  пересекается с  $W$ , то  $AB$  — общая хорда — пересекает окружность  $W$  на две дуги  $W_1$  и  $W_2$ , а окружность  $U$  — на две дуги  $U_1$  и  $U_2$ . Теперь убедитесь сами, что либо все точки дуги  $U_1$ , либо дуги  $U_2$  лежат по отношению к  $O$  в одной полуплоскости (что из двух верно — зависит от того, какая из двух дуг —  $W_1$  или  $W_2$  — больше).

**Ответ.** Нет, не могут.

**19. Ответ.** В обоих случаях: да, существуют.

**20. Ответ.**  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 39 = 88$ .

**Решение.** В самом деле, все клетки диагонали — одного цвета (например, все черные), и потому они должны иметь номера одной четности: только нечетные или только четные. Таким образом, первые 7 клеток диагонали не могут иметь номера меньше, чем

1, 3, ..., 13. Перед тем как занумеровать последнюю клетку диагонали, необходимо занумеровать не только 7 клеток диагонали, но также все клетки нижней половины доски (или все клетки верхней; сами сообразите, почему). Учтя 7 черных клеток на диагонали и еще 12 — в нижней половине, мы видим, что восьмая клетка диагонали будет, в лучшем случае, 20-й черной, и не может иметь номер меньше 39. Пример постройте сами.

**21. Решение.** Будем считать, что сторона  $CD$  все время остается неподвижной, а переклеивается один из треугольников, примыкающих к  $AB$ . Ясно, что каждый раз надо склеивать по новой диагонали: первая—вторая—первая...

При переклейках остается неизменной длина каждой из сторон, а также сумма противоположных углов. Поэтому если после нескольких переклеек каждая сторона вернулась на свое место, то полученный четырехугольник равен исходному; в самом деле, если бы угол  $A$  увеличился, то угол  $C$  должен был бы уменьшиться, но тогда, по теореме косинусов, диагональ  $BD$  должна была бы, с одной стороны, увеличиться, а с другой — уменьшиться.

Проследив за порядком сторон, нетрудно убедиться, что все стороны вернуться на свои места на шестой переклейке. С другой стороны, взяв четырехугольник, у которого длины всех сторон различны и

$$\angle A + \angle C \neq \angle B + \angle D,$$

мы сразу видим, что первые 6 четырехугольников различны.

**Ответ.** 6.

**22. Основная идея решения.** Рассмотрим достаточно большие номера, с тем чтобы почти все цифры очередного члена прогрессии попадали в номер.

Конкретнее, пусть первый член  $a_0$  есть  $k$ -значное число, а разность —  $(d - l)$ -значное. Выберем достаточно большое  $N$  (например,  $N = 10(k + l)$ ), тогда нетрудно получить утверждение задачи, рассмотрев члены с номерами  $10^{2N}$  (в этом члене прогрессии должны подряд стоять цифры 1000...0) и  $10^{2N} - 10^N$  (здесь должны быть цифры 99...900...0).

**23. Указание.** Достаточно научиться так переставлять шарики в нескольких парах коробочек от положения  $(k, r)$  к  $(r, k)$ , чтобы от любой можно было перейти к любой (пары, в которых можно осуществить перестановку, образовывали связный «граф допустимых обменов»).

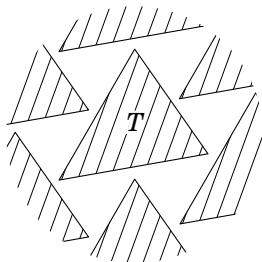
Очевидно, прежде всего, что за один ход можно сделать перестановку  $(k, 2k) \rightarrow (2k, k)$ . Уже это позволяет получить произвольный порядок в каждой из групп коробочек  $(1, 2, 4, 8, 16); (3, 6, 12); (5, 10, 20)$  и т. д.

Далее, нетрудно поменять местами пару 2 и 3:  $(2, 3) \rightarrow (4, 1) \rightarrow (3, 2)$ . Точно так же, хотя за большее число ходов, можно обменять местами 4 и 13, 2 и 15, и т. д. Убедитесь сами в связности получаемого «графа обменов».

**Ответ.** Всегда.

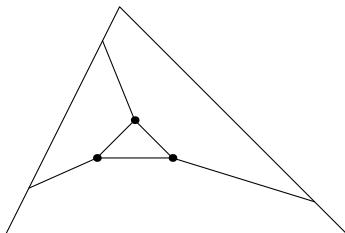
**24. Ответ.** а) Да. К примеру, равнобедренный треугольник, высота которого  $AD$  совпадает с диагональю единичного квадрата, а основание  $BC$  имеет длину  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ , имеет площадь  $\frac{2}{3}$ . Тем самым задача а) решена.

б)  $2/3$ . Идея доказательства того, что эта площадь не может быть больше  $2/3$ , такова: возьмем произвольный треугольник  $T$ , удовлетворяющий условию, и закрасим в черный цвет сам  $T$  и все его сдвиги на целочисленные векторы. Таким образом, плоскость стала черно-белой. Треугольник  $T$  ограничен с шести сторон шестью соседними треугольниками, а именно: со стороны вершины  $A$  — ближайшей стороной, параллельной стороне  $BC$ , от стороны  $BC$  — ближайшим углом, соответствующим углу  $A$ , для других вершин и сторон аналогично. Поэтому к  $T$  прилегает 6 белых треугольников, подобных ему; площадь двух треугольников, прилегающих к данной стороне, например к  $BC$ , не меньше половины площади (равенство достигается, если оба белых треугольника ровно вдвое меньше). Дальнейшие оценки стандартны.



**25. Ответ.** Можно,  $1 \times 3$ .

**26. Ответ.** Можно. Пример показан на рисунке.



**27. Указание.** Очевидно,  $x^3 - y^3$  также делится на 10, откуда легко вывести, что  $x$  и  $y$  заканчиваются одной и той же цифрой. Тогда  $x^2$ ,  $xy$  и  $y^2$  тоже заканчиваются одной и той же цифрой. Остается доказать, что эта цифра — нуль.

**28. Подсказка.** Четырехугольник  $SKBL$  вписанный тогда и только тогда, когда  $\angle B = \angle D$ .

Условие вписанности четырехугольника  $SKBL$  равносильно тому, что  $\angle SKB + \angle SLB = 180^\circ$ . Выражая эти углы через дуги вписанной в  $ABCD$  окружности, мы легко убеждаемся в том, что равносильное условие таково: дуга  $KL$  равна дуге  $MN$ . Поскольку это условие симметрично относительно вершин  $B$  и  $D$ , то получается, что условия вписанности четырехугольников  $SKBL$  и  $SNDM$  равносильны.

**29. Решение. а)** Воспользуемся следующей леммой.

**Лемма.** Если  $2^{k+1}$  монет разложены на 2 кучки по  $2^k$  монет в каждой и известно, что веса куч различны, то за  $k$  взвешиваний можно найти 2 монеты разного веса.

**Доказательство.** Возьмем половину монет из каждой кучки и взвесим. Как в случае равновесия весов, так и в случае неравновесия мы имеем две кучки по  $2^{k-1}$  монет в каждой (то ли взвешенные, то ли, наоборот, оставшиеся невзвешенными), вес которых различен, и у нас в запасе  $k - 1$  взвешиваний. Остается заметить, что при  $k = 0$  утверждение очевидно (требуется ноль взвешиваний).  $\square$

Докажем, что для  $2^k$  монет достаточно  $k$  взвешиваний. Разложим все монеты поровну на две чашки. Если веса различны, мы попали в ситуацию леммы и достаточно  $k - 1$  взвешиваний. Если же веса одинаковы, то на каждой чашке поровну монет того и другого веса, и таким образом, мы находимся в ситуации нашей задачи, но с числом монет  $2^{k-1}$ , и опять-таки применяем индукцию.

б) Приведенный выше метод требует трех взвешиваний, поэтому пойдем другим путем. Положим по две монеты на каждую чашку. Если одна из чашек перевесила, мы опять в ситуации леммы. Допустим теперь, что весы в равновесии. Это возможно в двух случаях: либо все 4 монеты на весах одного веса (тогда искомые монеты — любая пара вида «взвешенная, невзвешенная»), либо на каждой чашке лежит тяжелая и легкая (тогда годится любая пара монет с одной чашки). Остается, таким образом, только узнать, что из двух верно. Для этого достаточно положить

теперь все 4 взвешенных монеты на одну чашку, а оставшиеся — на другую.

**31. Указание.** Треугольник  $A'B'C'$  получен из треугольника  $ABC$  движением, нарушающим ориентацию, т.е. либо симметрией, либо симметрией со сдвигом.

**32. Решение.** Обозначим куски сыра

$$A > B > C > D > E > F.$$

Можно считать, что кусок  $A$  (самый тяжелый) лежит на левой чашке. Перебором легко убедиться, что имеется всего лишь 5 вариантов, в которых есть шанс, что кучки весят поровну (во всех остальных сразу видно, какая весит больше), — те, в которых на левую чашку кроме куска  $A$  кладут:

1)  $BF$ , 2)  $CF$ ; 3)  $DF$ ; 4)  $EF$  и 5)  $DE$ .

При этом, очевидно,  $BF > CF > DF > EF$  и  $DE > DF > EF$ .

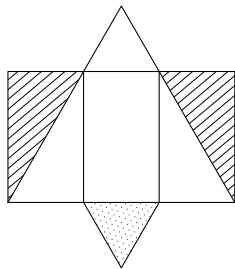
Положим первым взвешиванием на левую чашку  $ACF$  (на правую, соответственно,  $BDE$ ). Если имеет место равенство, то нам повезло, и все сделано за 1 взвешивание. Если  $ACF < BDE$ , то заведомо не годятся и тройки  $ADF$ ,  $AEF$ . Остается два варианта ( $ABF$  или  $ADE$ ), и достаточно проверить вторым взвешиванием любой из них (если равновесия нет, значит, годится другой).

Случай, когда  $ACF > BDE$ , разберите сами.

**33. Ответ.** 4904 способа. (Ответ для прямоугольника  $2 \times n$  равен  $2n(n-1) + 4$  способа.)

**34. Ответ.** Да, существует.

**Решение.** В частности, можно обклеить тремя равносторонними треугольниками правильную призму, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной 1, а каждая боковая грань — прямоугольник со сторонами 1 и  $\sqrt{3}$ . Длины сторон треугольников равны 1, 2, и 3 соответственно.



**35. Решение.** Имеем:

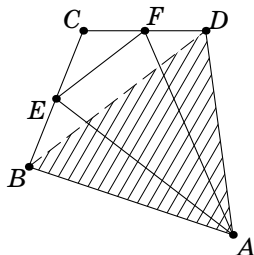
$$a^3 > (c-b)^3 = c^3 - b^3 + 3bc(b-c) > c^3 - b^3 - 3abc,$$

что и требовалось.

**36. Ответ.** Могут. Черные должны делать ход таким образом, чтобы четыре фишки все время образовывали прямоугольник. Очевидно, все время белые фишки будут стоять в его противоположных углах.

**37. Указание.** Площадь всего четырехугольника есть сумма площадей треугольников  $ABD$  и  $BCD$ , причем вторая площадь в 4 раза больше, чем площадь  $CEF$  (см. рисунок).

**Ответ.** 6.



**Замечание.** Нужно еще привести пример четырехугольника, для которого это значение реализуется.

**38. Ответ.** При всех  $n$ , кроме  $n = 1$  и  $n = 3$ . Например, если  $n = 4k$ , то нужно для начала зажечь лампочки в порядке

0110 0110 ... 0110

(1 — лампочка горит, 0 — не горит). Остальные случаи:  $n = 4k + 1$ ,  $n = 4k + 2$ , ... — также подбираются без особого труда.

**39. Решение.** Пусть  $S$  — число сторон всех многоугольников после нескольких разрезов,  $T$  — число тупых углов,  $U = S - T$ . В начальный момент  $S = 3$ ,  $T = 0$ ,  $U = 3$ . При каждом разрезе  $U$  увеличивается по крайней мере на 2. В самом деле, с новым разрезом возникает:

1) либо 4 новых стороны и не более 2 тупых углов (например, точка  $K$  лежит на стороне  $AB$ , точка  $L$  — на стороне  $CD$ , разрез по линии  $KL$  создает 2 или меньше тупых угла при вершинах  $K$ ,  $L$ , а две стороны  $AB$ ,  $CD$  заменяются шестью новыми:  $AK$ ,  $KB$ ,  $CL$ ,  $LD$  и двумя сторонами  $KL$  — для двух новых многоугольников);

2) либо 3 новых стороны и не более одного тупого угла (если разрез проходит через одну из имеющихся вершин);

3) либо 2 новых стороны и ни одного нового тупого угла — если разрез проведен через две уже имеющихся вершины.

Итак, после проведения  $n$  разрезов  $U \geq 2n + 3$ . По условию, образовался  $n + 1$  треугольник, следовательно,  $S = 3(n + 1)$ , откуда  $T \leq n$ .

**Ответ.** Нет.

**40. Указание.** Пусть  $k_n$  — соответствующее частное на  $n$ -м шаге. Прежде всего надо доказать, что  $\{k_n\}$  образуют невозрастающую последовательность:  $k_n \geq k_{n+1}$ . Следовательно, с какого-то момента все эти числа равны; осталось доказать, что с этого момента они равны 1.

**41. Решение.** 1) Поскольку операции с цепочками обратимы, достаточно доказать, что можно преобразовать обе цепочки к некоторой третьей, тогда можно также вторую преобразовать к первой.

2) Добьемся того, чтобы обе цепочки начинались с одной и той же костяшки. Пусть в обеих цепочках самое левое очко равно 0, а первые костяшки —  $(0x)$  и  $(0y)$ . Если  $x = y$ , то цель уже достигнута. Точно так же, если  $x \neq y$ , но в первой цепочке костяшка  $(y0)$  лежит нулем вправо, то цель — получить в обеих цепочках одну и ту же костяшку слева — достигается в один ход. То же верно, если во второй нулем вправо лежит костяшка  $(x0)$ . Если же то и другое неверно, то прочие костяшки с нулем более чем в половине случаев лежат нулем вправо, и потому существует такое  $z$ , что костяшка  $(z0)$  лежит нулем вправо как в первой, так и во второй цепочке. Разворачивая куски  $[(0x) \dots (z0)]$  и  $[(0y) \dots (z0)]$ , мы добьемся того, что первые костяшки совпадают.

3) В условии ничего не говорится о составе комплекта домино, и задача верна для любого комплекта. Поэтому мы можем в дальнейшем игнорировать первую костяшку, и точно тем же способом добиться совпадения вторых слева костяшек, и т. д.

**42. Указание.** Тангенсы углов треугольника должны удовлетворять соотношению: их сумма равна их произведению. Таким образом нужно решить в целых числах уравнение  $x + y + z = xyz$ .

**Ответ.** 1, 2, 3.

**43. Ответ.** Да, верно. Например, можно взять первую точку с абсциссой  $x = 100$ .

**45. Ответ.** Да, может.

**Указание.** 1) Достаточно доказать, что можно пересадить последнего (самого правого) зрителя  $A$  на свое место так, чтобы все остальные сидели по-прежнему не на своих местах; далее — индукция.

2) Для этого, в свою очередь, достаточно предъявить способ, позволяющий «сдвинуть»  $A$  ближе к своему месту так, чтобы остальные сидели не на своих местах.

3) Рассмотрим зрителя  $B$ , сидящего справа от  $A$ . Если при обмене  $A$ ,  $B$  местами  $B$  не попал на свое место, то наша цель



достигнута; если же нет, то надо сдвигать вправо уже пару зрителей (А, В). Далее нужно рассмотреть зрителя С, сидящего справа от В, ... и т.д.

**46. Указание.** Докажите, что любая из этих сторон по длине равна радиусу  $r$  окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Иными словами, нужно доказать, что если  $I$  — центр этой окружности, то  $IT_BO_AT_C$  — параллелограмм (то, что точки  $T_B$  и  $T_C$  равно отстоят от любой точки биссектрисы, исходящей из угла  $A$ , в частности от  $O_A$ , очевидно).

**47. План решения.** Эта задача, хотя и не особенно сложна, принадлежит к числу «многоходовок» и решается не иначе как «шаг за шагом». Нужно доказать, что

1) если в каком-нибудь квадрате  $2 \times 2$  три карты одной масти, то и четвертая той же масти;

2) в квадрате  $2 \times 2$  не может встретиться ровно три масти.

Из первого следует, что весь прямоугольник (будем называть его пасьянсом) разрезан на несколько прямоугольников так, что каждая масть занимает один или несколько из них; из второго — что разрезы идут от одного края до другого: вершина одного прямоугольника не может лежать на стороне другого.

Далее, поскольку число карт в масти нечетно, по крайней мере один из разрезов должен идти вдоль всего пасьянса, отрезая от него полосу  $1 \times 13$ .

Допустим, что такой разрез только один и, следовательно, имеются еще и разрезы «поперек» (один или несколько); таким образом, есть точка, где встречаются 4 прямоугольника. Теперь нужно

3) доказать, что в этом углу «встречаются» все 4 масти. Для определенности предположим, что слева — черные масти (пики и трефы), а справа — красные. Тогда легко видеть, что весь пасьянс разбит поперечными разрезами на несколько «зон», причем зоны расположены, как на рисунке:

|       |       |        |         |        |     |
|-------|-------|--------|---------|--------|-----|
| пики  | бубны | черные | красные | черные | ... |
| трефы | червы |        |         |        |     |

Но число карт в каждой вертикальной зоне делится на 4. Выходит, что число красных карт (червы и бубны) делится на 4, что неверно.

Итак, есть не менее двух разрезов «вдоль».

Подобным же образом исключаются случаи, когда есть 2 (а не 3) горизонтальных разреза или когда есть 3 горизонтальных и несколько вертикальных разрезов.

**48. Ответ.** Да, существуют. Годаются, например, числа

$$a = 2 + \sqrt{3} \quad \text{и} \quad b = 3 \cdot (2 + \sqrt{3}).$$

**Указание.** Следует воспользоваться тем фактом, что число

$$A = (2 + \sqrt{3})^m + (2 - \sqrt{3})^m$$

— целое и не делится на 3.

## XXIV Турнир городов (2002/03)

**1. Решение.** Нет: их было бы слишком много. В самом деле, в этом случае только у тысячи треугольников часть сторон были бы сторонами исходного 2002-угольника. Но это значит, что в среднем на треугольник приходится больше двух сторон, т.е. есть треугольник, у которого все три стороны совпадают со сторонами исходного, а это невозможно.

**2. Ответ.** Маша загадала 1001 (а Саша — то ли 2, то ли 1001).

**Решение.** Очевидно, каждому из детей требуется только узнать, что такое 2002: сумма ( $S$ ) или произведение ( $P$ )? Обозначим Машино число  $m$ , Сашино —  $s$ . Оба загаданных числа являются делителями 2002 (иначе по крайней мере один из двоих сразу понял бы, что  $2002 = S$ ) и не равны 2002 (иначе  $2002 = P$ ), следовательно,  $m, s \leq 1001$ .

Допустим, что  $m < 1001$ . Тогда Маша бы рассудила: «если бы было  $s > 1001$ , то Саша бы сразу понял, что  $2002 = S$ ; следовательно,  $s \leq 1001$ ; мое число  $m < 1001$  — значит,  $2002$  — это произведение, а не сумма». А раз Маша так не рассуждает,  $m$  не меньше 1001.

**3. Ответ.** а) Могло. б), в) Не могло.

**Решение.** а) Допустим, что в классе 3 ученика А, Б, В и было дано три задачи (1, 2, 3), причем А не решил ничего, Б решил задачи 1, 2 и В — задачи 1, 3.

б) Если  $3/4$  задач не решило  $3/4$  школьников, следовательно, доля нерешенных «человеко-задач» составила не менее

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} > \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, рассуждая аналогично относительно хороших школьников, мы легко убедимся в том, что доля решенных «человеко-задач» больше, чем  $1/2$ . Противоречие.

в) Допустим, что это возможно, и выясним, как хорошие школьники справились с трудными задачами. Поскольку трудных задач не менее 70 %, каждый хороший школьник должен был решить не менее  $4/7$  от их числа, т.е. более половины. С другой стороны, каждую из трудных задач не решило  $7/10$  от числа всех школьников, т.е. даже если ее не решил никто из плохих, то, сверх того, ее не решило по крайней мере  $4/7$  хороших школьников, т.е. более половины от их числа. Это вновь приводит нас к противоречию.

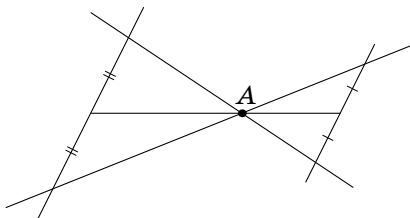
**4. Указание.** Разобьем все числа на пары с одинаковой последней цифрой (простейший способ — в пару входят числа  $k$  и  $1000 + k$ ,  $1 \leq k \leq 1000$ ). При этом остается два числа: 2001 и 2002.

Первый может применить следующую тактику: первым ходом взять число 2002, а далее стараться взять второе число из пары (если второй взял одно из них).

Если второй вплоть до самого конца берет только числа, не превосходящие 2000, то напоследок он возьмет число 2001, и первый выиграет. Установите сами, как модифицировать эту тактику, если второй на каком-то шаге берет число 2001.

**Ответ.** Выигрывает первый.

**5. Решение.** Нет, нельзя. Если через точку  $A$  проведено три прямые и еще две прямые пересекаются с ними так, что точки пересечения расположены указанным образом, то последние прямые параллельны (а не пересекаются в вершине угла).



**8. Указание.** Такая точка  $B$  существует тогда и только тогда, когда отрезок  $AB$  пересекает все проведенные прямые и, соответственно, на остальной части прямой  $AB$  ни справа, ни слева нет точек пересечения: она беспрепятственно уходит на бесконечность.

**9. Решение.** Справедлив более общий факт: если

$$0 < a \leq b \leq c \quad \text{и} \quad x \geq y \geq z > 0,$$

то

$$\frac{ax + by + cz}{a + b + c} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

Для доказательства достаточно переписать неравенство в виде

$$3(ax + by + cz) \leq (x + y + z) \cdot (a + b + c);$$

после раскрытия скобок оно приводится к виду

$$(a - b)(x - y) + (a - c)(x - z) + (b - c)(y - z) \leq 0.$$

Последнее неравенство очевидно.

**10. Решение.** Поскольку число все время возрастает, притом не более чем на 9, то в какой-то момент оно примет вид  $999 \dots 9a$ , где  $a$  — какая-то цифра. Если  $a$  четно, то цель достигнута, в противном случае четным будет следующее число.

**11. Ответ.** 3002 доллара.

**12. Ответ.** Нет, нельзя по многим причинам.

Например, нельзя различить:

а) номера  $2^{13} = 8192$  и  $2^{14} = 16384$  (две наибольшие степени двойки, меньшие 20 000);

б) номера 101 и  $101^2$ ;

в) номера 19 993 и 19 997 (они оба больше 10 000 и простые).

**13. Решение.** Очевидно, достаточно доказать, что есть две такие *противоположные* стороны, что суммы дуг между ними с одной и другой стороны равны; тогда они параллельны.

Возьмем какие-нибудь две противоположные стороны  $\{a, b\}$ . Каждая из сумм дуг между ними состоит из 24 слагаемых, причем разность двух соответствующих всегда равна  $\pm 25$ . Отсюда следует, что разность сумм  $R$  делится не только на 25, но и на 50 (почему?). Если  $R = 0$ , то все доказано. Если нет (например,  $R > 0$ ), сдвинем обе стороны на одно место против часовой стрелки; у новой пары противоположных сторон  $R$  изменилось на  $\pm 50$ . Двигаясь так и дальше, мы в конце концов придем к той же паре, но с противоположной стороны: к паре  $\{b, a\}$ . Для нее  $R < 0$ , т. к. получилась та же разность, что была вначале, но с другим знаком.

Остается применить к величине  $R/50$  «принцип дискретной непрерывности»: если какая-то величина принимает только целые значения, за один шаг меняется не более чем на 1 и принимает значения противоположных знаков, то где-то она проходит через 0.

**14. Указание.** Опишем вокруг треугольника  $ABC$  окружность и продолжим  $BP$  до пересечения с окружностью в некоторой точке  $K$ . Докажите, что треугольники  $AKC$  и  $APC$  равны. Отсюда следует, что  $BP \perp AC$ . Дальнейшее уже несложно.

**15. Ответ.** Для  $N = 3k$ , а также для  $N = 3k + 2$  максимальная разность равна  $k$ ; для  $N = 3k + 1$  она равна  $k - 1$ .

**Решение.** Для доказательства этой оценки используйте тот факт, что число проведенных диагоналей равно  $N - 3$  и что к каждой из них прилегают треугольники разных цветов.

Что касается построения примера, то достаточно построить нужные примеры для  $N = 3, 4, 5$  и придумать способ, как переходить от  $N$  к  $N + 3$ .

**16. Указание.** Основная лемма: из любых  $n$  целых чисел можно выбрать несколько (может быть, одно), сумма которых делится на  $n$ .

В силу этой леммы можно разложить все карточки по конвертам так, чтобы в каждом сумма была не больше  $n(n - 1)$  и при этом делилась на  $n$ . Дальнейшее решение ведется по индукции.

**17. Ответ.** Минимальное число испытаний равно половине числа узлов.

**Решение.** В самом деле, при меньшем числе испытаний всегда останется хоть один непроверенный узел. Если перегорели все ведущие в него провода, и только они, то все испытания пройдут успешно, а в этот узел ток не проходит.

Система испытаний для всех задач а)–в) строится однотипно. Например, для задачи в) требуется 32 испытания, и достаточно провести проверку всевозможных пар узлов, симметричных относительно главной диагонали, а также 8 узлов главной диагонали:  $(1, 5)$ ,  $(2, 6)$ ,  $(3, 7)$  и  $(4, 8)$ .

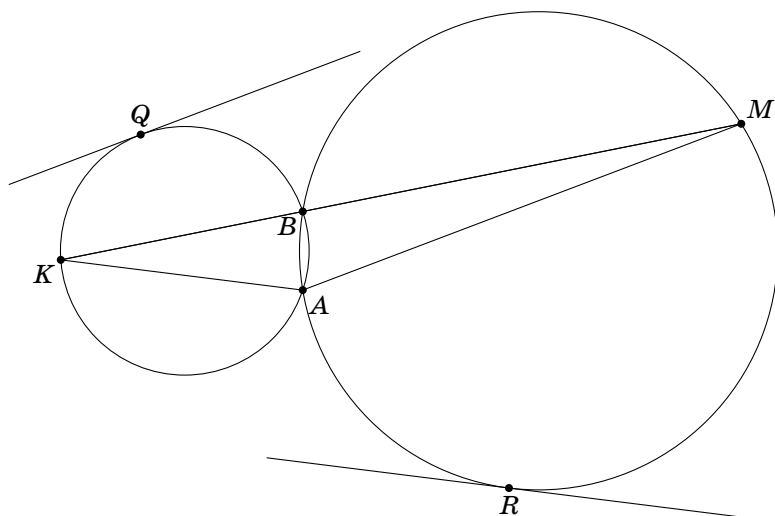
**19. Решение.** Для того чтобы получился пятиугольник, плоскость должна пересекать пять граней куба, в том числе две пары параллельных. Поэтому полученный в сечении пятиугольник  $BCDKL$  имеет две пары параллельных сторон. Пусть параллельны стороны  $BC$  и  $KD$ , а также  $CD$  и  $BL$ . Продолжим стороны  $DK$  и  $BL$  до пересечения в точке  $A$ . Заметим, что  $ABCD$  — параллелограмм. Но тогда  $AL + AK > LK$  (по неравенству треугольника), откуда

$$BC + CD = AB + AD = BL + LA + AK + KD > BL + LK + KD :$$

сумма двух сторон пятиугольника больше, чем сумма трех остальных. Это исключает возможность, что длина любой стороны меньше 120 см, но больше 80 см.

**22. Указание.** Пусть  $P_1$  — точка пересечения прямых  $KM$  и  $QP$ . Докажите сначала, что четырехугольник  $QBRP_1$  — вписанный. Докажите затем, что и четырехугольник  $QBRP_2$ , где  $P_2$  — точка пересечения  $KM$  и  $PR$ , — тоже вписанный. Получается, что окружность, описанная вокруг треугольника  $QBR$ , пересекает прямую  $KM$  в трех точках:  $B$ ,  $P_1$  и  $P_2$ . Отсюда следует, что

$$P_1 = P_2 = P.$$



Пункт б) доказан. Из доказанного следует, что дуга  $BQ$  равна дуге  $BR$ . Получаем, что  $\angle BAQ + \angle BAR = 180^\circ$ , и доказан пункт а).

**23. Идея решения.** Если это не так, рассмотрим наименьшее число, которое не входит в последовательность, и докажем, что в ней есть бесконечно много чисел, которые не взаимно просты с ним, что и приводит к противоречию.

**План решения.** Докажите, что в последовательности

- 1) бесконечно много четных чисел,
- 2) встречаются все четные числа,
- 3) встречаются все нечетные.

**25. Ответ.** Верно. Для доказательства достаточно обозначить через  $x$  число кошельков, через  $y$  — число карманов и оценить суммарное число денег в карманах.

**Замечание.** Это чисто логическая задача, где понять суть задачи труднее, чем найти решение.

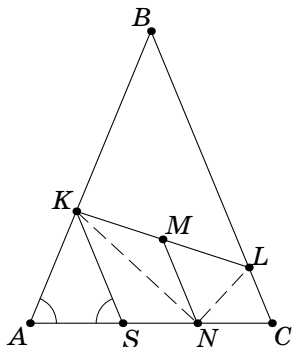
**26. Ответ.** Первый выигрывает при всех  $n$ , кроме  $n = 4$ .

**27. Ответ.**  $90^\circ$ .

**Решение.** Достаточно доказать, что  $MN = \frac{1}{2}KL$  (и применить свойство медианы в прямоугольном треугольнике).

Для этого проведем еще из  $K$  прямую параллельно  $BC$  до пересечения с  $AC$  в некоторой точке  $S$ . Тогда  $LCSK$  — трапеция,

$MN$  — ее средняя линия и  $MN = (LC + SK)/2$ . Остается заметить, что  $SK = AK$  (см. рисунок).



**28. Указание.** Докажите, что если последовательность имеет длину не меньше 5 (а тем более длину 6), то прибавляется каждый раз одна и та же цифра.

**Ответ.** 5 чисел (например, если начать с числа 807).

**29. Ответ.** Невозможно.

**Указание.** Раскрасьте столбцы доски в два цвета: первый столбец — черный, второй — белый и т. д.

**31. Ответ.** Да, может. Например, можно взять палочки длины 2, 4, 8, ...,  $2^{99}$ ,  $2^{100} - 3$ .

**32. Указание.** Пусть треугольник  $ABC$  — остроугольный. Если угол, под которым видна из точки  $M$  одна из его сторон, например сторона  $AB$ , меньше, чем угол, под которым она видна из любой точки описанной окружности, лежащей на дуге  $AB$ , то, как легко видеть, также и окружность, описанная вокруг  $ABM$ , меньше окружности, описанной вокруг  $ABC$ . Это противоречит условию.

С другой стороны, сумма углов  $\alpha$ , под которыми стороны  $ABC$  видны из точек, лежащих на соответствующих дугах описанной окружности, равна  $360^\circ$ . Сумма углов  $\beta$ , под которыми эти стороны видны из точки  $M$ , также равна  $360^\circ$ . Поскольку для каждого в отдельности выполняется неравенство  $\alpha \leq \beta$ , то все эти неравенства обязаны быть равенствами.

Остается разобрать случай тупоугольного треугольника  $ABC$ .

Другой подход к решению: воспользоваться тем, что три круга, симметричные описанному кругу относительно трех сторон треугольника, имеют только одну общую точку (а именно ортоцентр треугольника; это единственный кандидат на роль точ-

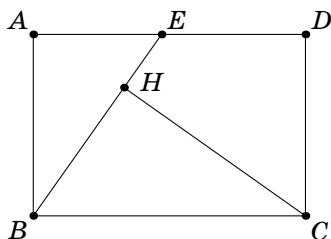


ки  $M$ ). Если же один из этих кругов увеличить, но так, чтобы окружность по-прежнему проходила через точки  $A$ ,  $B$ , то три круга уже не имеют ни одной общей точки, т. е. для  $M$  нет места на плоскости.

**33. Указание.** В начальном положении у половины номерков четность суммы цифр совпадает с четностью места, у половины не совпадает. Между тем после переключивания создалась ситуация, когда при переходе к следующему та и другая четность меняется на 1. Поэтому после переключивания либо у всех номерков четность суммы цифр совпадает с четностью номера его места, либо — наоборот — у всех не совпадает.

**Ответ.** 50.

**34. Решение.** Пусть  $AB = a < AD = b$ . Один из способов разреза таков. Выберем на  $AD$  такую точку  $E$ , что  $BE$  равно стороне искомого квадрата  $\sqrt{ab}$ , и сделаем разрез по линии  $BE$ . Затем опустим из  $C$  перпендикуляр  $CH$  на  $BE$  (условие  $b/2 < a$  требуется, чтобы  $H$  попала на  $BE$ , а не на ее продолжение) и сделаем разрез по линии  $CH$ . Получилось два треугольника  $ABE$ ,  $CBH$  и четырехугольник  $CHED$ , из которых легко составить квадрат (см. рисунок).



**35. Ответ.** Может. Например, годится уравнение  $x^2 + 5x + 6 = 0$ .

**36. Указание.** Докажите по отдельности два факта:

1)  $a \leq 2R$ , 2)  $2r < h$ .

**37. Решение.** а) Будем называть игры, где встречались команды «одной четности», правильными, а другие — неправильными. В турнире было сыграно 105 матчей. Если все матчи были правильными, то после каждого матча количество команд, сыгравших нечетное число матчей, либо увеличивалось на 2, либо уменьшалось на 2. С другой стороны, как перед началом турнира, так и по его окончании число таких команд равно 0, следовательно, оно должно было уменьшаться и увеличиваться одно и то же число раз, а это уже противоречие.

**б)** Из предыдущего рассуждения более или менее понятно, что **это возможно**. Вот один из примеров.

Разобьем все 15 команд на три группы по 5 (обозначим команды этих групп  $A1—A5$ ,  $B1—B5$  и  $C1—C5$ ). В каждой пятёрке проведем «правильный» круговой турнир (легко проверить, что это возможно).

Затем выстроим все 15 команд в цикл

$$A1—B1—C1—A2—B2—\dots—A5—B5—C5$$

и проведем сначала матчи соседей ( $A1—B1$ ,  $C1—A2$ , ...,  $A5—B5$ ). Теперь все команды, кроме  $C5$ , сыграли по 5 матчей. Теперь проводим *один* неправильный матч  $B5—C5$ ; далее все правильные:  $C5—A1$ ,  $B1—C1$ , ...,  $C4—A5$ . Теперь все команды сыграли по 6 матчей, и каждой команде группы  $A$  осталось сыграть по 4 матча с командами группы  $B$ , 4 — с командами группы  $C$ , и то же для групп  $B$ ,  $C$ .

Поэтому оставшиеся матчи проводятся просто: проводим 4 тура игр между группами  $A$  и  $B$  (в каждом туре будут встречаться команды, сыгравшие одно и то же число матчей). Теперь команды групп  $A$  и  $B$  сыграли по 10 матчей, команды группы  $C$  — по 6. Проводим аналогично 4 тура между командами групп  $A$  и  $C$ , и в заключение — 4 тура между группами  $B$  и  $C$ .

**38. Ответ.** Если  $n$  — простое число, то выигрывает второй, в противном случае — первый.

**Указание.** После первого хода от треугольника остается равнобедренная трапеция, пусть ее боковая сторона равна  $k$ . Единственный разумный ход второго — превратить эту трапецию в параллелограмм, отломив от нее треугольник со стороной  $k$  (в противном случае первый своим ходом превратит фигуру в шестиугольник, и второй проиграет «досрочно»). Отсюда легко следует, что все ходы после первого — вынужденные; от трапеции отламывается по треугольнику так, чтобы она была то трапецией, то параллелограммом, и нетрудно разобраться в ходе дальнейшей игры.

**39. Ответ.** 21 клетка.

**Указание.** Ясно, что нельзя разрезать клетки на границе. Разделим внутренний квадрат  $7 \times 7$  на 4 прямоугольника  $3 \times 4$  и центральную клетку. Теперь докажите, что в прямоугольнике нельзя разрезать более 5 клеток; этого достаточно.

Пример, где разрезается 21 клетка, постройте сами.

**40. Решение.** Доказательство следует из двух фактов.

1) В произвольном четырехугольнике  $ABCD$  сумма  $AB^2 + CD^2$  больше или меньше, чем  $AD^2 + BC^2$ , в зависимости от того, какой из двух углов, образуемых диагоналями, острый и какой тупой.

Это вытекает из рассмотрения четырех треугольников  $ABE$ ,  $BCE$ ,  $CDE$ ,  $DAE$ . А именно, в первом из них  $AB^2$  больше или меньше, чем  $AE^2 + BE^2$ , в зависимости от угла  $E$ . Остается написать аналогичные неравенства для остальных треугольников и сложить все 4 неравенства.

2) В описанной трапеции  $AD^2 + BC^2 > AB^2 + CD^2$ .

Это следует из того, что сумма оснований равна сумме боковых сторон (четыреугольник  $ABCD$  описанный), а разность оснований трапеции больше, чем разность боковых сторон (почему?).

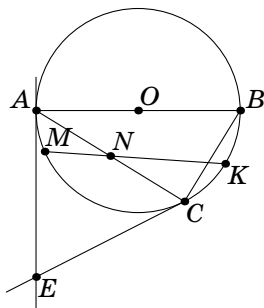
**41.** См. указание к задаче 36.

**42. Указание.** Для любого многочлена степени выше 1 существует такое  $C$ , что если  $|x| > C$ , то  $|P(x)| > |x|$ . С другой стороны, из условия вытекает, что для бесконечно большого количества натуральных чисел имеет место неравенство  $0 < P(x) < x$  (почему?).

**Ответ.** Единица.

**43. Решение.** Нельзя. Так как сумма углов в вершине куба составляет  $270^\circ$ , то в каждую вершину должен явиться хотя бы один из углов наших треугольников. При этом либо в ней сходятся два угла (поскольку углов 9, а вершин 8, это может быть только в одной вершине), либо угол треугольника должен равняться  $90^\circ$ . Но тогда получается, что у трех треугольников имеется не менее 7 прямых углов, что абсурдно.

**44. Указание.** В точке  $N$  пересекаются сразу три отрезка, а именно,  $AC$ ,  $KM$  и  $EO$ . Четырехугольник  $AMCK$  вписан в данную окружность. Четырехугольник  $AECO$  тоже вписанный (поче-



му?). Записав на этом основании равенство произведений отрезков хорд

$$EN \cdot NO = AN \cdot NC = MN \cdot NK,$$

мы видим, что и четырехугольник  $МЕКО$  — вписанный.

Остается заметить, что  $OE \perp AC$ ,  $OK \perp BC$ , так что угол  $ЕОК$  прямой. Следовательно, угол  $ЕМК$  тоже прямой.

**45. Решение.** Да, может. Вот одна из возможных стратегий Киры: она называет последовательно числа 2, 3, 4, 6, 16 и 12. Убедитесь сами, что каким бы ни был остаток от деления на 12 (именно на 12) исходного числа Бори, не позже чем на шестом шаге он проигрывает.

**46. Ответ.**  $2^{12}$ .

**Указание.** Докажите, что:

1) из данной таблицы можно получить таблицу с любыми знаками в первых трех строках (это дает оценку снизу),

2) если выбрать любую клетку последней строки и сделать указанную операцию относительно этой клетки, то можно затем сделать еще несколько операций относительно клеток первой — третьей строк так, чтобы «аннулировать» ее и вернуться к исходной таблице. (Очевидно, достаточно проверить это для двух клеток: угловой и бортовой, для двух других все делается по симметрии.)

**47. Решение.** Нет, не могло. В самом деле, допустим противное. Тогда можно устроить черно-белую раскраску полученного рисунка (противоречий не будет, т. к. в каждой вершине сходится четное число фигур). Поскольку в вершинах тоже сходится четное число отрезков, весь периметр квадрата будет одного цвета, скажем, черным. Сосчитаем число ребер двумя способами. Если белых треугольников  $k$ , то ребер  $3k$ . С другой стороны, черные треугольники имеют те же ребра, что белые, плюс стороны квадрата, т. е. у них  $3k + 4$  ребер. Противоречие.

## XXV Турнир городов (2003/04)

**1. Ответ.** Можно. Например, вписать во все клетки двух граней размером  $3 \times 4$  число 5, двух граней  $3 \times 5$  — число 8, и граней  $4 \times 5$  — число 9.

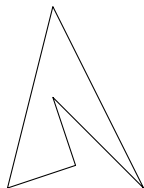
**2. Указание.** Заметьте для начала, что треугольник  $A_1A_3A_6$  равен всем треугольникам, полученным из него «сдвигом» номеров вершин (две стороны — диагонали первого типа, одна — второго).

**Ответ.** Да.

**3. Указание.** Каждое нечетное число от 1 до  $2n - 1$  встретится в сумме ровно 1 раз.

**4. Ответ.** Только при  $n = 5$ .

**Решение.** Из каждой точки должно выходить 2 синих и 2 красных отрезка, следовательно, другие числа не подходят. При  $n = 5$  следует взять вершины невыпуклого пятиугольника (на рисунке показаны красные отрезки).



**5. Указание.** Допустим, что полей всего 49. Тогда шашка 25 должна остаться на месте (ведь за ней должны выстроиться еще 24 шашки), поэтому первый ход — шашкой 24 (прыжок). После этого шашка 24 тоже должна оставаться на этом месте, но тогда уже никому больше перепрыгнуть не удастся. При 50 полях легко строится пример.

**Ответ.** 50.

**7. Ответ.** 360.

**Решение.** Необходимо нарисовать 96 квадратиков, примыкающих к границе квадрата  $25 \times 25$  (иначе мы не сможем получить границу большого квадрата).

Теперь разделим внутренний квадрат  $23 \times 23$  на 264 доминошки размером  $2 \times 1$  (причем останется один лишний квадратик). Каждая доминошка состоит из двух квадратиков  $1 \times 1$ , один из которых придется нарисовать, так как иначе мы не получим изображение отрезка, по которому граничат квадратики, составляющие эту доминошку. Это и дает оценку 360.

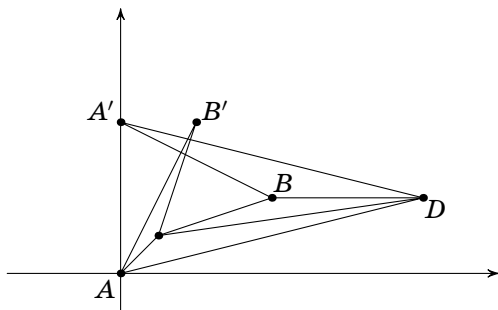
Остается только построить пример, что несложно.

**8. Указание.** Пусть вначале покупатель все свои деньги отдаст купцу, тогда нужно только доказать, что имея на руках

1999 рублей, можно выдать сдачу в любой сумме от 0 до 1998. Пусть, далее, продавец, перед тем как отдать покупателю сдачу, отправился к меняле и разменял свои деньги на максимально крупные (т.е. если у него есть две пятистотки — обменял их на 1000, если есть 5 десятков — обменял на 50, и т.п.) После этого осталось прикинуть, какие именно деньги оказались у продавца (получится единственный вариант), и доказать, что имея 1999 рублей такими монетами и купюрами, можно набрать  $N$  рублей для любого натурального  $N$  от 1 до 1999.

**9. Указание.** Точки  $O_1, O_2, O_3, O_4$  лежат на окружности, описанной вокруг данного квадрата, а точки  $A, B, C, D$  — внутри концентричной ей окружности радиуса 1. Поэтому оба пункта вытекают из оценки площади четырехугольника, расположенного в круге данного радиуса:  $S \leq 2R^2$ .

**10. Ответ.** Да, могло. Пример такой развертки: рассмотрим точки  $A(0, 0)$ ,  $A'(0, 4)$ ,  $B(4, 2)$ ,  $B'(2, 4)$ ,  $C(1, 1)$ ,  $D(8, 2)$ . Грани тетраэдра —  $AB'C$ ,  $ACD$ ,  $CBD$  и  $BA'D$  (после склейки точки  $A$  и  $A'$ ,  $B$  и  $B'$  соединяются), причем грани  $AB'C$  и  $BA'D$  перекрываются.



**11. Ответ.** Да. Можно, например, взять прогрессию с разностью  $d = 100!$  и первым членом 1.

**12. Ответ.** Да, прав.

**Решение.** Сделать это проще всего так: первая сваха сватает всех блондиров (по предположению, это возможно), а вторая всех брюнетов. При этом кое-кто окажется сосватан дважды, т.е. возникает несколько цепочек вида  $Br_1 - Bl_1 - Br_2 - \dots - Bl(Br)_k$ . Нечетного числа элементов в цепочке (например, она начинается и кончается мужчиной) быть не может: ведь мы сосватали всех

брюнетов согласно первой свахе, следовательно, у всех у них разные невесты. Если же в цепочке четное число элементов, то надо просто разорвать лишние связи, и получится  $k$  браков.

**13. Указание.** Подставляя  $n = m + s$ , мы можем преобразовать данное соотношение к виду  $m \cdot (k - 2s - 1) = s(s + 1)$ ; при  $k = 2, 3$  левая часть неположительна.

При  $k > 3$  уравнение имеет, вообще говоря, несколько решений (их число растет с ростом  $k$ ). Проще всего подобрать решение при данном  $k$  следующим образом: если  $k$  четно, то положим  $m = n - (k - 2)/2$ , если же  $k$  нечетно, то положим  $m = n - (k - 3)/2$ . Убедитесь сами, что в этом случае уравнение, получающееся для числа  $n$ , всегда имеет натуральный корень.

**Ответ.**  $k \neq 2, 3$ .

**14. Решение.** Расставим 56 слонов вдоль границы квадрата. Каждый из них должен бить хотя бы две отмеченных клетки — итого 112. При этом каждая отмеченная клетка сосчитана не более четырех раз (почему?). Таким образом, число отмеченных клеток не меньше 28.

Отметить 28 клеток можно, например, по границе прямоугольника  $7 \times 9$ , центр которого совпадает с центром доски. (Почему не подходит прямоугольник  $8 \times 8$ ?)

**15. Решение.** Диагонали делят квадрат на 4 треугольника; будем считать, что точка  $O$  лежит в треугольнике, прилежащем к стороне  $AB$ , и докажем, что уже сумма трех углов, а именно углов  $OCD$ ,  $OBC$  и  $ODA$ , больше  $135^\circ$ . В самом деле, угол  $OCD$  заведомо больше  $45^\circ$ ; кроме того, в треугольнике  $OBD$  против большей из сторон  $OD > OB$  лежит и больший угол:  $\angle OBD > \angle ODB$ , откуда сумма углов  $OBC$  и  $ODA$  больше  $90^\circ$ .

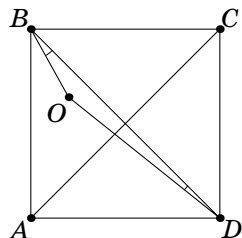
Второе неравенство ( $S < 225^\circ$ ) есть непосредственное следствие первого. В самом деле, если  $S$  всегда больше  $135^\circ$ , то сумма дополнительных углов

$$S' = \angle OAD + \angle OBA + \angle OCB + \angle ODC$$

всегда меньше  $225^\circ$ . Но очевидно, что утверждения относительно сумм  $S$  и  $S'$  равносильны, так что  $S$  тоже меньше  $225^\circ$ .

**16. Ответ.** Нет, неверно.

**Решение.** Назовем «условно-кратчайшим» такой путь: сделаем развертку коробки и соединим  $A$  и  $B$  отрезком. Суть дела

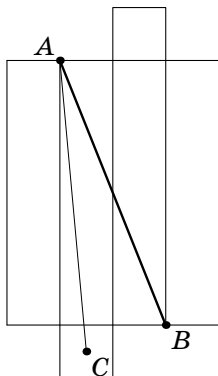


в том, что из  $A$  в  $B$  ведет несколько «условно-кратчайших» путей, причем они — разной длины. Отсюда понятно, что если взять точку  $C$  на «условно-кратчайшем» — но не самом коротком! — пути вблизи от  $B$ , то более короткий путь к  $C$  — не «по прямой», а с заходом в точку  $B$ , но зато по более короткой развертке.

К примеру, возьмем коробку  $2 \times 2 \times 10$ . Противоположная от муравья вершина находится на расстоянии не более

$$\sqrt{(2+2)^2 + 10^2} = \sqrt{116}.$$

С другой стороны, если нужно добраться до центра противоположной грани  $2 \times 2$ , то расстояние до границы этой грани равно 10, а от границы до ее центра — 1. Значит, расстояние от муравья до середины противоположной грани  $2 \times 2$  не меньше  $11 > \sqrt{116}$ .



**17. Ответ.** Первый может обеспечить себе 499 очков, второй — 501.

**Указание.** «Жадный» алгоритм (карту противника следует бить наименьшей из карт, если ее вообще можно побить, а если это невозможно, то сбрасывать наименьшую свою карту), обеспечивает получение такого числа очков для обоих игроков. (Самому можно ходить, например, каждый раз с наименьшей своей карты, за исключением последнего хода второго.)

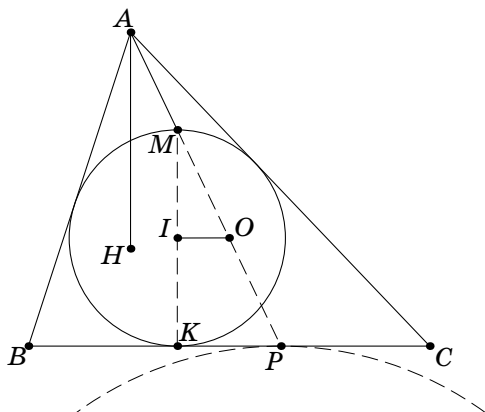
**19. Решение.** Применим индукцию. Если  $N$  четно, представим в нужном виде число  $N/2$  и умножим это равенство почленно на 2. Если же  $N$  нечетно, вычтем из него наивысшую степень тройки; получится четное число, с которым поступим, как выше.

Например, если  $N = 49$ , надо его представить как  $27 + 2 \cdot 11$ ; число 11, по предположению, мы умеем представить, и действительно,  $11 = 2 + 9$ , откуда  $49 = 27 + 2 \cdot (9 + 2)$ .

**21. Замечание.** «Многоходовая» задача. В ней трудно выделить главную идею, и нет другого пути, как доказывать факты один за другим. Дело усложняется еще и тем, что часть фактов (ниже мы для удобства понимания указываем возле номера «всегда») верны для любого треугольника, а часть — только при условии задачи (их мы указываем, как «у.з.», т.е. «с использованием условия задачи»).

**Решение. (0)** Дополнительное построение. Восставим из  $K$  диаметр вписанной окружности, перпендикулярный  $BC$ ; обозначим





через  $M$  его второй конец. Проведем прямую  $AM$ ; пусть  $P$  — точка ее пересечения с  $BC$ .

(1, *всегда*)  $АН$  равно удвоенному расстоянию от  $O$  до стороны  $BC$ . Для доказательства достаточно заметить, что  $O$  является ортоцентром для вдвое меньшего треугольника, образованного серединами сторон данного треугольника  $ABC$ .

(2, *у. з.*) Поскольку расстояния от  $BC$  до центров вписанной и описанной окружностей равны,  $KМ = АН$ , откуда  $КМАН$  — параллелограмм,  $АМ \parallel НК$ . Остается, таким образом, доказать, что  $O$  лежит на продолжении  $АМ$ , т. е. на  $МР$ .

(3, *всегда*) Точка  $P$  — точка касания внеписанной окружности прямой  $BC$ , причем  $ВР = СК$ .

(4, *у. з.*) Треугольник  $МКР$  — прямоугольный, и  $O$  лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его катетам  $МК$  и  $КР$ . Поэтому точка  $O$  лежит на  $МР$  и  $АО \parallel НК$ .

**23. Указание.** Первое утверждение верно для любого тетраэдра, так как если  $M, N, P, Q$  — середины  $AC, AD, BC$  и  $BD$  соответственно, то отрезки  $MN$  и  $PQ$  параллельны  $CD$  (они являются средними линиями треугольников  $ACD$  и  $BCD$ ).

Докажите теперь, что точка  $O$  пересечения трех плоскостей: плоскости  $MNPQ$  и двух биссекторных плоскостей двугранных углов при ребре  $AB$  и при ребре  $CD$  равно отстоит от всех граней тетраэдра, т. е. является центром вписанной сферы.

**24. Указание.** а) Проверьте сначала, что квадрат  $2 \times 2$  «приводится» тогда и только тогда, когда в нем четное число минусов.

Остается убедиться, что если в каждом квадрате  $2 \times 2$  четное число минусов, то можно привести всю таблицу.

**б) Квадрат  $4 \times 4$  «приводится»** тогда и только тогда, когда в 8 его клетках, стоящих на бортах (но не в углах), имеется четное число минусов.

**25. Указание.** Условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда  $\angle A = 60^\circ$ .

**26. Указание.** Примените формулу суммы арифметической прогрессии.

**Ответ.** Только при  $n = 1$  и  $n = 2$ .

**27. а) Решение.** Несколько раз перельем из  $B$  в  $C$  три литра и выльем в раковину, пока в  $B$  не останется 8 литров. Дальнейшие действия: перельем 3 литра из  $B$  в  $C$ , а оттуда в  $A$ ; теперь в  $A$  находится 6 литров 50%-го раствора, в  $B$  — 5 л воды. Перельем 5 л из  $A$  в  $C$ , затем 4 л из  $B$  в  $A$ , а последний литр воды из  $B$  выльем в раковину. Остается слить вместе все, что осталось.

**б) Ответ.** При любом  $N > 6$ , не кратном 3.

**Решение.** Указанный выше метод годится всегда, если  $N = 3k + 2$ . Если  $N = 3k + 1$ , то все еще проще: выливаем из  $B$  по 3 литра, пока не останется 7 литров.

Если  $N = 3k$ , то задача, очевидно, неразрешима, т.к. количество литров в любом сосуде всегда будет кратно 3.

**28. Указание.** Частное является делителем числа  $10 \dots 01$  и меньше 10.

**Ответ.** 7.

**30. Указание.** Рассмотрите равнобедренный треугольник  $ABC$ . Биссектриса угла  $B$  — это  $BO$ , откуда  $BO \perp AC$ . Аналогично  $CO \perp BD$ . Таким образом, прямые  $CA$ ,  $BD$  и  $OK$  — высоты треугольника  $BOC$ .

**32. Указание.** Периметр больше суммы диагоналей, но меньше их удвоенной суммы, причем *эти неравенства нельзя усилить*.

**Ответ.** Нет; да; да.

**33. Решение.** Пусть  $d$  — разность прогрессии. Поскольку числа  $a_1^2$  и  $a_2^2$  входят в прогрессию, их разность является целым кратным  $d$ . Разделив ее на  $a_2 - a_1 = d$ , мы получим, что  $a_1 + a_2$  — целое число. Точно так же  $a_2 + a_3$  — целое число, а тогда и

$$2d = a_3 - a_1 = (a_2 + a_3) - (a_1 + a_2)$$

— целое. Дальше уже просто.

**34. Ответ.**  $10^9$ . Например, можно выписать все числа, у которых сумма цифр делится на 10.

**35. Указание.** Примените формулу суммы прогрессии.

**36. Указание.** Шашки не должны стоять на краю доски; следовательно, все они стоят на черных полях квадрата  $6 \times 6$ . Если расставить в этом квадрате все 18 шашек, то 8 шашек центра не находятся под боем; сняв только одну из 18 шашек, мы можем поставить под бой не более 4.

**Ответ.** 16 шашек.

**37. Решение.** Нет. Справедливо даже более сильное утверждение: ни для какого рационального  $n = p/q$  курс не принимает одно значение дважды. В самом деле, это было бы равносильно тому, что имеет решение уравнение

$$\left(1 + \frac{p}{q}\right)^k \left(1 - \frac{p}{q}\right)^r = 1;$$

однако очевидно, что в левой части стоит несократимая дробь со знаменателем  $q^{k+r}$ .

**38. Решение.** 1) Точка  $M$  делит отрезок  $EF$  пополам: в самом деле,

$$ME^2 = MB \cdot MA = MF^2.$$

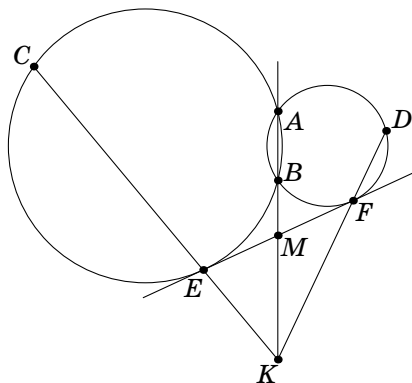
2) Отсюда следует, что  $ME \cdot MF = MB \cdot MA = MB \cdot MK$ . Но это значит, что четырехугольник  $BEKF$  вписанный,

$$\angle BEK + \angle BFK = 180^\circ.$$

3) Наконец,

$$\angle BAC + \angle BAD = \angle BEK + \angle BFK = 180^\circ,$$

а это и значит, что точки  $C$ ,  $D$  и  $A$  лежат на одной прямой.



**39. Решение.** Примем одну из сторон угла  $A$  за координатную ось; пусть шарик вначале был выпущен под углом  $\alpha$  к этой оси. После любого числа отражений шарик движется к оси либо под углом  $\alpha$ , либо под углом  $-\alpha$ , в ту или другую сторону. Легко видеть, что из этих 4 вариантов для возвращения пригоден только один: вернуться в исходную точку внутри данного угла шарик может, только двигаясь под углом  $\alpha$  в обратном направлении. Но для этого он должен был бы пройти в обратном направлении и весь путь, т. е. где-то он должен был повернуть на  $180^\circ$ , а это невозможно.

**40. Решение.** Наименьшее неразрешенное число — это произведение первых 21 простых чисел; обозначим его  $r$ . После хода первого игрока оставшееся число не делится на  $r$ . Теперь понятна тактика второго: после каждого своего хода он должен добиваться, чтобы оставшееся число делилось на  $r$ .

**Ответ.** Выигрывает второй.

**42. Решение.** Примем одну из сторон угла  $A$  за координатную ось; пусть шарик вначале был выпущен под углом  $\alpha < 1^\circ$  к этой оси. После отражения направление движения шарика образует с этой осью либо угол  $\alpha + 2r$ , либо угол  $-\alpha + 2r$ , где угол  $r$  составляет целое число градусов. Внутри угла  $A$  шарик может попасть только в момент, когда это направление есть  $\alpha$  (т. е.  $r = 0$ ). Но это означает, что шарик движется в направлении, противоположном исходному; легко видеть, что он перед этим должен был пройти весь путь в обратном направлении, т. е. где-то повернуть на  $180^\circ$ , что невозможно.

**43. Решение.** Пусть сначала проекция пирамиды на  $P$  есть треугольник. Тогда он является проекцией одной из граней, и его площадь есть произведение площади грани на косинус соответствующего угла; ясно, что если этот косинус меньше 1, то площадь не максимальна.

Пусть теперь проекция есть четырехугольник  $PQRS$ ; он является проекцией двух граней, например,  $ABC$  и  $ABD$ . Пусть  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  — середины сторон  $AC$ ,  $BC$ ,  $AD$  и  $BD$ ; тогда  $KLMN$  — параллелограмм, причем  $KL$  и  $MN$  параллельны  $AB$ , а  $LN$  и  $MK$  параллельны  $CD$ . Площадь фигуры  $PQRS$  вдвое больше площади проекции параллелограмма  $KLMN$ , и потому если она максимальна, то и площадь проекции  $KLMN$  максимальна. Но, как и в первом случае, ясно, что для этого требуется, чтобы параллелограмм был параллелен  $P$ , т. е.  $AB$  и  $CD$  должны быть параллельны  $P$ .

**45. Ответ.** Нет.

**Указание.** Можно расположить окружность так, чтобы она *пересекала* параболу в двух точках, причем в точке  $A$  — касание 3-го порядка, а точка  $B$  — просто точка пересечения.

Для этого годятся, например, точки  $A(1, 1)$  и  $B(-3, 9)$ .

**46. Решение.** а) Очевидно, что положив рубашки черных мастей одним способом, а красных — другим, служащий может показать экстрасенсу цвет карты. После этого экстрасенс может попросту всегда говорить «черва», если масть красная, и «пика», если она черная, и угадать таким образом половину карт.

Будем, однако, действовать по-другому. Пусть служащий кодирует цвет каждой четной карты с помощью расположения ее и предыдущей (например, цвет 20-й карты кодируется с помощью положения 19-й и 20-й). Таким образом, экстрасенс угадает все четные карты со 2-й по 34-ю. После этого в колоде осталось только 2 карты, и экстрасенс знает, какие это карты (поскольку он видел все предыдущие). Поэтому служащему достаточно показать их порядок, что можно сделать с помощью 35-й карты. Это обеспечивает угадывание 19 карт.

б) Рассмотрим следующие 17 карт: все нечетные, кроме первой и последней, и вторую карту. По принципу Дирихле, среди этих 17 карт найдется 5 карт одной масти; назовем эту масть основной. Служащий может закодировать основную масть положением первых двух карт. Затем он, как выше, кодирует масти всех четных карт, и двух последних.

Экстрасенс должен называть основную масть на каждом из нечетных мест, начиная с третьего (что гарантирует ему не менее 5 успехов); сверх того, экстрасенс угадает масти всех четных карт, кроме второй, а также масти двух последних карт. Всего он угадает не менее 23 карт (последнюю мы сосчитали дважды).

**Замечание.** Существует также алгоритм для угадывания 26 карт.

**Ответ.** Да (в обоих случаях).

## XXVI Турнир городов (2004/05)

1. Ответ. Нет.

**Указание.** Для этого было бы необходимо, чтобы числа с номерами  $k$  и  $k + 10$  всегда давали один и тот же остаток при делении на 10 и сумма первых 10 чисел делилась на 10. Эти условия несовместимы.

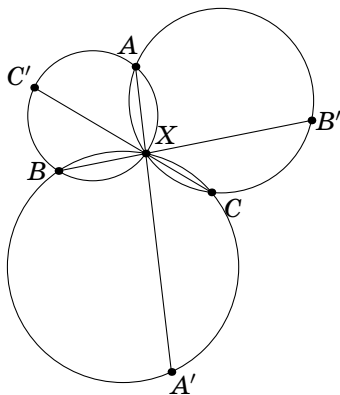
2. **Решение.** Из условия следует, что шариков любого цвета не менее 12. Следовательно, любых двух цветов — не менее 24, и достаточно вытащить  $111 - 23 = 88$  шариков. Меньшим числом не обойтись, т. к. если в ящике действительно 12 красных и 12 синих шариков, то остальные 87 — только зеленые и белые.

3. **Указание.** Из условия относительно Иванова следует, что из  $A$  и  $B$  исходит нечетное число маршрутов, а из любого другого города — четное. Что касается Петрова, то ответ зависит от четности числа  $n$  (которая не указана в условии): если  $n$  четно, то он может «застрять» только в  $A$ , если же нечетно — то в  $B$ .

4. **Указание.** Опустите из центра  $O$  окружности перпендикуляр  $ON$  на прямую; очевидно,  $N$  — середина стороны искомого квадрата. Затем из точки  $N$  нужно провести наклонную с тангенсом угла 2; точка ее пересечения с окружностью будет одной из вершин квадрата.

5. **Ответ.** 2004 способа (по одному для каждого числа слагаемых от 1 до 2004).

6. **Указание.** Подобие в каждом случае доказывается по равенству двух углов, которое, в свою очередь, следует из равенства



вписанных углов и вертикальных углов. А именно:

$$\angle BCA' = \angle BXA' = \angle B'XA = \angle B'CA.$$

Тем же способом доказывается еще пять аналогичных равенств.

**Существенное замечание.** Основная трудность технического характера состоит в том, что нужно учесть все возможные варианты расположения трех окружностей; в зависимости от этого либо (как утверждалось выше) все указанные 4 угла равны, либо некоторые из них в сумме равны  $180^\circ$ .

**7. Решение.** Допустим, что в ящике 7 шариков белого цвета и много (например, по 40–50) двух других. При этом условие будет выполнено: среди 26 шариков будет 19 синих и красных, следовательно, не менее 10 одного цвета. Если вытащено только 65 шариков, то возможно, среди них будет 7 белых и по 29 — синих и красных, следовательно, 65 недостаточно. Убедитесь сами, что 66 достаточно.

**8. Ответ.** Да. В самом деле, из условия следует, что если число  $z$  может быть представлено в виде  $z = P(P(x))$ , то  $P(z) = Q(z)$ . Но таких чисел  $z$  бесконечно много.

**10. Решение.** Если  $N$  нечетно, то среднее арифметическое всех чисел будет целым. При  $N = 2k$  годится расстановка:

$$2, 1, 4, 3, \dots, 2k, 2k - 1.$$

Таким образом, получаем ответ.

**Ответ.** При всех четных  $N$ .

**11. Решение.** Такими точками, во всяком случае, являются ортоцентр, центр вписанной и центр описанной окружности. В неравностороннем треугольнике они будут различными. В равностороннем треугольнике легко найти три подходящие точки.

**12. Указание.** Докажите равенство треугольников  $CA'A$  и  $CB'B$ .

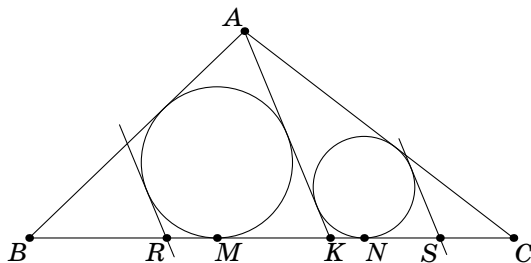
**Ответ.** Обязательно.

**13. Ответ.** 60. (Можно расставить 64 коня и снять коней с 4 центральных клеток.)

**14. Решение.** Петя должен найти (прямым перебором) пару чисел среди написанных, среднее арифметическое которых равно среднему геометрическому двух других. Отсюда следует, что первая пара — это непременно  $x + y$  и  $x - y$ , и величины  $x$ ,  $y$  находятся мгновенно. Основной камень преткновения: доказать, что другой такой пары нет. (Указание. Если одно из чисел этой пары

заменить на меньшее, то среднее арифметическое пары уменьшается, а среднее геометрическое другой пары — увеличивается.)

**15. Решение.** Проведем к обеим окружностям по касательной, каждая из которых параллельна  $AK$ , но находится по другую сторону от окружности. Пусть  $R, S$  — точки пересечения этих касательных с  $BC$ ; очевидно, они лежат на стороне, а не на ее продолжениях. Поэтому  $BM \cdot CN > RM \cdot SN = KM \cdot KN$ .



**16. Вспомогательное утверждение.** Если после четырех разрезов получились куски  $(10, 10 + a, 10 - a, 10 + b, 10 - b)$ , то  $A$  получит 30,  $B$  — 20. Поэтому достаточно для каждого привести стратегию, позволяющую получить подобный нарез (или лучше).

**Указание.** Пусть, например, первым ходом  $A$  отрезает кусок меньше 10 или больше 20. Тогда  $B$  может разрезать больший из двух кусков так, чтобы образовались куски  $(a, b, b)$ ,  $a < 10$ . После этого он сможет получить больше 20, применяя симметричную стратегию ( $A$  режет один из больших кусков —  $B$  режет второй такой же, и т. д.). Отсюда видно, что  $A$  (если хочет получить хотя бы 30), должен первым ходом отрезать кусок не меньше 10 и не больше 20. С другой стороны, если  $A$  отрежет 20, то при любой дальнейшей игре  $B$  он сумеет получить не менее 30 (дальнейшую стратегию обоих разберите сами).

**Ответ.**  $A$  может гарантировать себе 30 фунтов,  $B$  — 20.

**17. Решение.** Без ограничения общности можно считать, что одна из сторон  $A$  равна 1, и что из прямоугольников типа  $A$  можно сложить именно  $B$  (а не только подобный  $B$ ).

Рассмотрим два случая:

- 1) стороны 1 и  $a$  прямоугольника  $A$  соизмеримы;
- 2) они несоизмеримы.

В первом случае  $a$  рационально. Тогда и стороны  $B$  рациональны. Остается заметить, что из одинаковых прямоугольни-



ков с рациональными сторонами можно составить прямоугольник с *любым* рациональным соотношением сторон (и только такие).

Если же стороны несоизмеримы, т.е.  $a$  иррационально, то нужно доказать, что все «кирпичи»  $A$ , из которых составляется второй прямоугольник, должны идти одинаково (стороны длины 1 параллельны друг другу, и стороны длины  $a$  — тоже). Поэтому размеры  $B$  равны  $n$  и  $ma$ , и достаточно составить, наоборот,  $m$  «кирпичей» типа  $B$  в длину и  $n$  — в ширину, чтобы получить прямоугольник, подобный  $A$ .

**18. Указание.** Сначала следует найти коэффициенты. А именно, пусть  $T$  — период  $h(x)$ . Представим  $g$  в виде  $g(y) = y/k + u(y)$ . Докажите, что второе слагаемое периодически с периодом  $kT$ .

**19. Ответ.** Оба числа  $m, n$  не меньше 9, при этом  $|m - n| \neq 9$ .

**Указание.** Достаточно показать, что:

1) если оба условия выполнены, то независимо от начального числа камней первый может сделать так, что в куче останется не  $m$  и не  $n$  камней (следовательно, после хода второго останется хотя бы один камень);

2) если одно из этих условий не выполняется, то существует такое число камней, при котором второй выигрывает.

**21. Ответ.** Искомое геометрическое место — окружность с центром  $O$  и радиусом  $(R^2 - d^2)/(2r)$ , где  $d = OI$  — расстояние между центрами.

**23. Решение.** Основная лемма: если величины углов одного из треугольников  $T$  равны  $a, b, c$ ,  $a < b$ , то его можно разрезать на два треугольника, один из которых подобен  $T$ , а другой имеет углы  $a, b - a, c + a$ . (Факт очевиден, неочевидно только то, что именно он нужен.)

Таким образом, в заключительный момент вместе с каждым треугольником присутствуют также и треугольники, получающиеся вычитанием одного угла из другого.

Дальнейшее рассуждение достаточно стандартно: если утверждение неверно, рассмотрим тот наименьший угол  $a$ , для которого существует разрешенный треугольник  $\{a, b, c\}$ , отсутствующий среди уже имеющихся, и т.д.

**Замечание.** Задача по существу не геометрическая. Ее можно переформулировать так: «есть простое число  $n$ , и несколько троек натуральных чисел  $\{a, b, c\}$ . Сумма каждой тройки равна  $n$ . Затем одна из троек заменяется на две тройки натуральных чисел  $\{a, k, n - a - k\}$  и  $\{b, n - k, k - b\}$ , которые не совпадают с уже имеющимися...» и т.д.

**24. Решение.** Сделаем такую инверсию с центром в точке  $O$ , что первая окружность переходит в равную второй. Вторая, соответственно, перейдет в равную первой. Тогда, с одной стороны, лучи  $OF$  и  $OE$  перейдут в себя, с другой — мы имеем картинку, симметричную исходной относительно биссектрисы угла  $AOD$ . Значит, она же биссектриса угла  $EOF$ , откуда  $\angle AOE = \angle DOF$ .

**25. Ответ.** На 2 км.

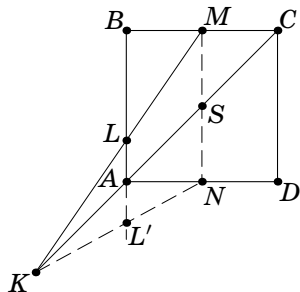
**26. Указание.** Если первая цифра числа  $3N$  больше 2, но меньше 9, то деля это число на 3, вы получаете число с первой цифрой 1 или 2.

**27. Указание.** На каждой вертикали, кроме двух крайних, требуется сделать двумя ферзями не менее 3 ходов (поскольку вначале один должен уступить дорогу), а на двух крайних вертикалях, по той же причине, придется сделать в сумме не менее 5 ходов. При аккуратном выборе ходов двадцати трех достаточно.

**Ответ.** 23 хода.

**28. Решение.** Центр квадрата  $S$  лежит на диагонали и делит отрезок  $MN$  пополам. Отсюда следует, что точка  $A$  также делит пополам отрезок  $LL'$ , где  $L'$  — точка пересечения  $KN$  с продолжением стороны  $AB$ . Но тогда очевидно, что

$$\angle LNA = \angle L'NA = \angle KNA.$$



**29. Указание.** Автомобилист совершил поездку по контуру многоугольника, и потому либо сделал один оборот вокруг своей оси (4 «лишних» поворота в ту или другую сторону), или (если он начинал путь в угловой точке) на четверть оборота больше или меньше.

**Ответ.** 95, 96, 97 или 103, 104, 105.

**30. Указание.** Отбросим у каждого квадратного трехчлена слагаемое  $x^2$ ; уравнение параболы превращается в уравнение прямой. Абсциссы точек, в которых пересекаются графики данных парабол — те же, что у точек пересечения соответствующих прямых.

**31. Решение.** Пусть данное число  $A$  равно, к примеру, 3550012. Припишем к нему еще одну цифру (любую), скажем, ноль: пусть  $C = AO = 35500120$ . Где-то написано число

$$B = CC \dots C = 35500120 \dots 35500120 \text{ (7 раз подряд).}$$

В этом месте, как бы ни проводились разрезы, где-то будет вырезано число  $A$ . А так как чисел, в которые входит  $B$ , бесконечно много, то число  $A$  встретится бесконечно много раз.

**34. Решение.** Задача имеет много решений. Самое короткое: раскрыть скобки в неравенстве

$$0 < \sum x_i(x_i - 2)^2.$$

**35.** См. решение задачи 42.

**36. Указание.** Докажите, что

$$A'X = \frac{1}{2} \cdot AB = B'X \quad \text{и} \quad A'Y = \frac{1}{2} \cdot CH = B'Y.$$

Отсюда легко следует, что четырехугольник  $A'XB'Y$  симметричен относительно своей диагонали  $XY$ .

**37. Указание.** Данный угол между часовой и минутной стрелкой в течение 12 часов повторяется только 11 раз, и в эти моменты положение секундной стрелки относительно этих двух стрелок различно.

**Ответ.** Верно.

**38. Ответ.** а) 11 или 13; б) 43, 37, 36 или 31.

**Указание.** Во-первых, в каждом квадратики будет сделан только один разрез. Во-вторых, если известно, какой разрез сделан в одном квадратики, то тем самым однозначно определено, какие именно разрезы будут сделаны во всех остальных (почему?).

Указанные в пункте б) числа получаются так:  $6 \cdot 7 + 1$ ,  $6 \cdot 6 + 1$ ,  $5 \cdot 7 + 1$  и  $5 \cdot 6 + 1$ .

**39. Ответ.** Нет. Контрпример можно построить, уже ограничившись двумя деталями (например, если две детали размером  $1 \times 2 \times 3$  укладываются в коробку размером  $2 \times 2 \times 3$ ).

**40. Решение.** После первого хода один из игроков получил несколько алтынов, и он же выбирает монету. Обозначим этого игрока  $A$ , а другого  $B$ . Поскольку в игре нет ничьей (суммарное число денег нечетно), в этот момент либо у  $A$ , либо у  $B$  есть выигрышная стратегия. Но первым своим действием Ерема решает, кому из них быть в роли  $A$ , а кому — в роли  $B$ . Следовательно, у Еремы есть выигрышная стратегия. (Чистое «доказательство существования».)

**Ответ.** Выигрывает Ерема.

**41. Решение.** Обозначим через  $\zeta_k$  сумму номера строки и номера столбца (считая от левого верхнего угла), в которых стоит

$k$ -я фишка. Из условия следует, что сумма полученных чисел  $\Sigma$  равна

$$(1 + 2 + \dots + 8) \cdot 2 = 72.$$

При перемещении каждое из чисел  $\zeta_k$  могло либо остаться неизменным (если фишка осталась на той же диагонали), либо увеличиться, но не уменьшиться. Если в каждой строке и столбце вновь стоит по одной фишке, то полная сумма  $\Sigma$  не изменилась, следовательно, не изменилось и каждое из чисел  $\zeta_k$ . Таким образом, все фишки сдвигались вдоль диагоналей; но тогда получается, что все они двигались вниз, в том числе и фишка, которая стояла в самой нижней строке.

**Ответ.** Невозможно.

**42. Указание.** Расстояние между двумя точками равно

$$|a - b| \sqrt{1 + \left[ \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right]^2}.$$

Воспользуйтесь тем, что  $f(a) - f(b)$  делится на  $(a - b)$ .

**43. Указание.** Пусть  $O_1, O_2$  — центры окружностей. Докажите равенство углов  $\angle ACO_2$  и  $\angle BCO_2$ ; тогда  $O_2$  делит дугу  $AB$  пополам, откуда немедленно следует утверждение задачи.

**45. Ответ.** Да.

**Примером** может служить, в частности, многочлен Лежандра

$$T_2(x) = \cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1.$$

Тогда

$$f(f(\dots f(x) \dots)) = T_{2^n}(x) = \cos(2^n \arccos x),$$

и корнями уравнения будут числа

$$\frac{\pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \dots \pm \sqrt{2}}}}{2}.$$

**Другой интересный пример** дает многочлен  $f(x) = x^2 - 8x + 15$  (основная лемма: для того чтобы число  $f(x)$  принадлежало отрезку  $[-1, 7]$ , необходимо, чтобы и  $x$  принадлежал тому же отрезку).

**46. Указание.** У обоих многогранников одинаков угол между векторами, исходящими из центра многогранника в центр одной из граней и в вершину той же грани.

**47. Указание.** Нужно сопоставить каждому маршруту, начинающемуся в  $b_2$ , маршрут, начинающийся в  $a_1$ .

Если путь начинается в  $b_2$ , то он содержит или участок  $a_2—a_1—b_1$ , или  $b_1—a_1—a_2$ . Сопоставим этому пути следующий: пройдем в обратном направлении от  $a_1$  до  $b_2$ ; затем пройдем из  $b_2$  в первом случае в  $b_1$ , во втором в  $a_2$ ; далее пройдем по исходному пути. Различным путям с началом  $b_2$  будут соответствовать различные пути с началом  $a_1$ . Убедитесь, что существуют пути с началом  $a_1$ , которые таким способом не получаются.

**48. Указание.** Если число цветов равно  $n$ , то справедливы утверждения:

а) если число точек не меньше  $2^n$ , то существует раскраска отрезков, при которой Петя не может достигнуть цели;

б) если  $p$  — простое,  $p > n$ , то уже для  $p^2$  точек существует такая раскраска.

Поэтому **ответ** в обоих случаях: нет.

**Решение.** Способ раскраски отрезков во втором случае: занумеруем точки парами чисел  $(a, b)$ ,  $a, b$  — вычеты по модулю  $p$ . Если  $a - a' \equiv k \cdot (b - b') \pmod{p}$ ,  $k \leq n$ , то отрезок между точками  $(a, b)$  и  $(a', b')$  следует закрасить в  $k$ -й цвет (оставшиеся отрезки можно закрасить произвольным образом). Для доказательства того, что при этом Петя не сможет достичь цели, используйте тот факт, что при любой раскраске имеется не менее  $p + 1$  точки одного цвета.

## XXVII Турнир городов (2005/06)

**1. Указание.** Каждый из этих отрезков равен половине соответствующей стороны:  $H_1M_2 = BC/2$ , и т. д.

**2. Ответ.** Нет, не обязательно. Возможно, что в четырех несмежных вершинах стояли числа  $+1$ , а в других четырех несмежных — числа  $-1$ .

**3. Ответ.**  $\frac{1}{11} \leq a < \frac{1}{10}$ .

**4. Ответ.** 196 (т.е. все клетки, кроме клеток «креста» из вертикали и горизонтали, пересекающихся в центре доски).

**5. Решение.** Один из способов:

- 1) взвешиваем монеты № 1, 2, 3;
- 2) взвешиваем монеты № 1, 4, 5;
- 3) взвешиваем монеты № 2, 4.

Проверьте, что соотношение весов во всех шести случаях будет различным (например, если фальшивая монета — шестая, то 1-е и 2-е взвешивания дадут одинаковый результат, а 3-е — ровно две трети от него).

**6. Ответ.** Нет.

**Решение.** Пусть существуют натуральные  $a, b, n$ , для которых верно  $n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2$ . Заметим, что  $a < a+1 \leq b$ . Поэтому

$$(a+1)^3 - a^3 \leq b^3 - a^3 < (n+1)^2 - n^2,$$

т.е.  $3a^2 + 3a + 1 < 2n + 1$ , или  $3a^2 + 3a < 2n$ . Возводя в квадрат, получаем

$$4n^2 > 9a^4 + 18a^3 + 9a^2 > 4a^3,$$

откуда  $n^2 > a^3$ . Но  $n^2 < a^3$  — противоречие. Значит, таких чисел нет.

**7. Указание.** Задача совпадает с такой: дан отрезок длины 1, построить отрезок длины  $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ . Для ее решения следует, весьма стандартным образом, в последнем выражении избавиться от иррациональности в знаменателе.

**Ответ.** Да.

**9. Указание.** Примем, что  $A$  — прямой угол и что  $F$  — центр квадрата, построенного на  $BC$ . Тогда:

1)  $AF \perp DE$  (обе прямые образуют угол  $45^\circ$  с любым катетом), так что площадь треугольника  $DEF$  равна  $\frac{1}{2}DE \cdot AF$ ,

2) площадь треугольника  $ABC$  равна  $\frac{1}{2}DE \cdot AK$ , где  $K$  — точка пересечения  $AF$  с  $BC$ . Пункт а) отсюда получается немедленно, а для пункта б) надо еще доказать, что  $AK \leq KF$ .

**10. Решение.** Пусть дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Рассмотрим тетраэдр  $ACB_1 D_1$ . При повороте через ребро этот тетраэдр переходит в тетраэдр, получаемый из  $BDA_1 C_1$  параллельным переносом, и наоборот,  $BDA_1 C_1$  переходит в тетраэдр, получаемый параллельным переносом из  $ACB_1 D_1$ . Чтобы вернуть куб на первоначальное место, его надо перекачать четное количество раз (представим, что куб перекачивается по шахматной доске, на каждом шаге цвет клетки меняется). Значит тетраэдр  $ACB_1 D_1$  перейдет в себя.

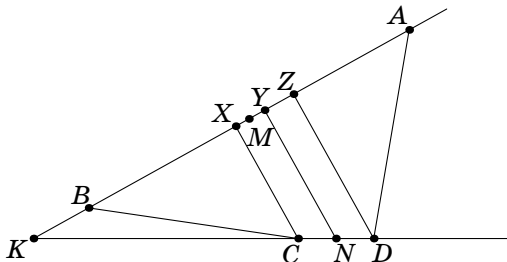
С другой стороны, при повороте на  $90^\circ$   $AC$  переходит в  $BD$ , но этот отрезок не принадлежит  $ACB_1 D_1$ , значит поворот верхней грани не мог произойти.

**11. Решение.** Заметим, что число  $n = 119 \dots 911$ , где вместо многоточия стоит произвольное количество девяток, является палиндромом. Число  $n + 110$  имеет вид  $120 \dots 021$ , где вместо многоточия стоит некоторое количество нулей, очевидно, также является палиндромом. Осталось заметить, что чисел  $n$  указанного вида можно предъявить бесконечно много.

**Замечание.** Среди чисел, в которых есть хотя бы четыре знака, подходят только числа вида  $n = ab \dots ba$ , где  $a$  — произвольная цифра от 1 до 9,  $b$  — произвольная цифра от 0 до 8, а вместо многоточия стоит произвольное количество цифр 9. Существуют также специальные варианты с количеством знаков от одного до трех, но таких чисел, очевидно, заведомо меньше 2005.

**Ответ.** Да.

**12. Решение.** Очевидно,  $AB \neq CD$ , иначе четырехугольник  $ABCD$  был бы параллелограммом и точка  $K$  не существовала бы. Пусть для определенности  $AB > CD$ , пусть точки  $B$  и  $C$  лежат ближе к  $K$ , чем  $A$  и  $D$ . Обозначим через  $X, Y, Z$  проекции  $C$ ,



$N$ ,  $D$  на прямую  $AK$ . Рассмотрим прямоугольные треугольники  $ADZ$  и  $BCX$ ; их гипотенузы равны, и так как катет  $DZ$  больше  $CX$ , следовательно, катет  $AZ$  меньше  $BX$ , и точка  $Y$  лежит ближе к  $A$ , чем к  $B$ , тогда как  $M$  — середина  $AB$ . Поэтому  $Y$  лежит на  $AM$ , соответственно,  $M$  лежит на  $YK$ . Так как угол  $KYN$  прямой, получается, что угол  $KMN$  тупой.

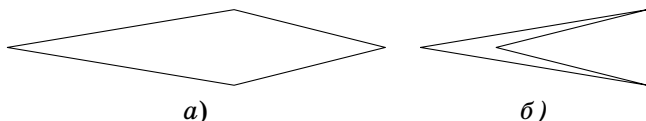
**13. Указание.** 1) Нельзя снять ни одну из ладей, стоящих в углу.

2) Когда остается только 4 ладьи в углах и еще одна, эту последнюю тоже нельзя снять.

Построение примера для 59 ладей требует лишь аккуратности.

**Ответ.** 59.

**14. Ответ.** Нет в обоих случаях. На рисунках показано, в каких случаях это окажется невозможным.



**15. Указание.** Докажите сначала, что если  $(x, y, z)$  — единственное решение исходного уравнения при некотором  $N$ , то, во-первых,  $x = 1$  или  $z = 1$ , и, во-вторых,  $y \leq 2$ .

**Ответ.** 5251.

**16. Решение.** Задача имеет много решений, все они основаны на методе индукции. Приведем две возможности.

**А.** Свести «задачу-1000» к «задаче-999»: опустошить одну из банок (ту, где варенья было меньше всего), проследив при этом, чтобы в каждой из оставшихся было по-прежнему не более  $1/100$  всего варенья.

**Б.** Свести «задачу-100» к «задаче-99»: довести количество варенья в наибольшей банке (обозначим ее Б) ровно до  $1/100$ , а после этого каждый раз брать варенье из Б и еще из 99 банок. В таком случае достаточно следить только за оставшимися банками: Б опустеет вместе с остальными.

**17. Указание.** Если  $n > 2$ , можно взять числа

$$1, (n-1), (n-1)^2, \dots, (n-1)^{n-1}.$$

**Ответ.** При всех  $n$ , кроме  $n = 2$ .

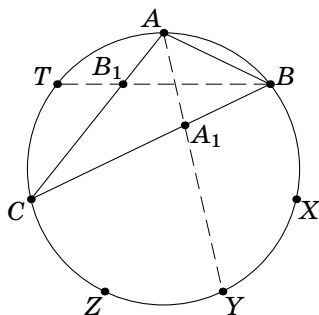
**20. Решение.** Разделим вначале окружность на три дуги  $A$ ,  $B$ ,  $C$  как попало, и пусть  $a \geq b \geq c$  — суммы чисел на получившихся



дугах. Если  $a - c < 1$ , то доказывать нечего. В противном случае сдвинем точку, разделяющую эти две дуги (любые две дуги граничат, поскольку их только три) так, чтобы одно из чисел дуги  $A$  перешло на дугу  $C$ . Докажите, что при этом разность между наибольшим и наименьшим числом уменьшилась (при этом не забывайте, что теперь неизвестно, какое именно — наибольшее и какое — наименьшее). Дальнейшее очевидно: если эта разность все еще велика, ее можно вновь уменьшить; делать это можно только конечное число раз (почему?), в конце концов разность будет меньше 1.

**21. Указание.** Описав вокруг треугольника  $ABC$  окружность и разделив ее на 7 равных частей, мы, очевидно, получим правильный семиугольник  $ABXYZCT$ . При этом точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат соответственно на диагоналях  $AY$  и  $BT$  семиугольника, причем  $AA_1 = BA_1$ ,  $YA_1 = CA_1$ . Аналогичные равенства справедливы для точки  $B_1$ .

Отсюда уже нетрудно вывести, что при повороте треугольника вокруг точки  $A_1$  на подходящий угол отрезок  $A_1C_1$  переходит в  $A_1B_1$ .



**22. Указание.** 1) При одной операции сумма квадратов чисел увеличивается на 2.

2) Если число 2005 получено за минимальное число операций, то в этот момент на доске присутствуют также числа 1, 2, ..., 2003 (2004 не присутствует, так как 2005 получено из двух чисел 2004).

**Ответ.**

$$\frac{2005^2 + 2003^2 + 2002^2 + \dots + 2^2 + 1^2 + 1^2}{2} = 1\,342\,355\,520.$$

**23. Указание.** Треугольник  $ANM$  получается из исходного треугольника  $ABC$  симметрией относительно биссектрисы угла  $A$  (треугольники  $ABN$  и  $ACM$  — равносторонние).

**24. Решение.** Задача имеет много решений. Например, можно сравнить для каждой диагональной клетки сумму чисел слева от нее и над ней. Первая есть сумма арифметической прогрессии  $1 + 2 + \dots + (k-1)$ , а вторая состоит из одинаковых чисел и равна  $k(k-1)$ , т. е. вдвое больше.

**25. Ответ.** 2, 3 или 4 решения.

**26. Указание.** а) Если начальное число орехов нечетно, то орех будет съеден при первой дележке. Если же число орехов делится на  $k$ -ю степень двойки, то при каждой дележке этот показатель в той кучке, которую делят, уменьшается на 1.

б) Достаточно доказать, что если орехов 3 (нужно разобраться, сколько у кого орехов в этот момент), то больше не будет съеден ни один орех.

**27. Ответ.** а) Две грани (надо закрасить 2 противоположные грани одного из кубиков);

б) 12 граней (достаточно закрасить все грани двух кубиков);

в)  $2 \cdot 10^9 - 14$  грани (лучше всего закрасить по две грани у всех кубиков, кроме семи).

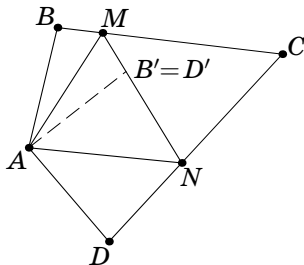
**28. Ответ.** а) 200 (по две на каждое «старое» ребро);

б) 300.

**29. Ответ.** Да, найдутся. Например, можно взять функции  $p(x) = \cos x$  и  $q(x) = \frac{\pi}{2} - x$ .

**30. Ответ.** 4, 5 или 6.

**31. Решение.** Построим треугольник  $AB'M$ , симметричный  $ABM$  относительно  $AM$ , и треугольник  $AD'N$ , симметричный  $ADN$  относительно  $AN$ . Из условия на углы следует, что лучи  $AB'$  и  $AD'$



совпадают. Из равенства  $AB = AD$  следует, что и точки  $B'$  и  $D'$  совпадают;  $BM + ND = MB' + B'N$ . Наконец, поскольку  $ABCD$  — вписанный, то сумма углов  $B$  и  $D$  равна  $180^\circ$ , следовательно,  $MB'D$  — прямая, а не ломаная,  $MB' + B'N = MN$ .

**33. Ответ.** 4 шара.

**34. Решение.** Годятся, например, все пары чисел  $(7; 999 \dots 97)$ . См. также решение задачи 46.

**35. Указание.** Искомая точка  $O$  есть вторая точка пересечения окружностей, описанных вокруг  $ABMN$  и  $LBCK$  (первая точка пересечения — это точка  $B$ ).

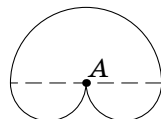
**36. Указание.** См. решение задачи 43.

**Ответ.** Нет.

**37. Указание.** В каждой строке должна быть хотя бы одна двойка либо два нуля; в каждом столбце — хотя бы один ноль или две двойки.

**Ответ.**  $2005 \cdot 2006 - \frac{2005 + 2006}{3} = 4\,020\,693$ .

**38. Ответ.** Как ни странно, существует. Простейший пример — «сердечко». А именно, построим на отрезке в одну сторону полуокружность, а в другую — две равных полуокружности радиуса вдвое меньше. Центр большой полуокружности удовлетворяет требованию.



**39. Ответ.** а) Нет.

**Решение.** В самом деле, сравним числа, которые Юра выбрал на  $k$ -м шаге и Яша выбрал на  $(6 - k)$ -м шаге. К этому моменту Юра вычеркнул  $(k - 1)$  строк и столько же столбцов, Яша —  $(5 - k)$  строк и столбцов. Поэтому существует хотя бы одно число  $R$ , которое осталось и в таблице Юры, и в таблице Яши. Поскольку Юра выбирает в оставшейся у него таблице наибольшее число (т. е. такое, которое не меньше  $R$ ), а Яша — наименьшее, то число Юры больше (возможно — равно).

**Ответ.** б) Это возможно. Вот пример такой таблицы:

|   |    |     |      |       |
|---|----|-----|------|-------|
| 1 | 2  | 2   | 2    | 2     |
| 2 | 10 | 20  | 20   | 20    |
| 2 | 20 | 100 | 200  | 200   |
| 2 | 20 | 200 | 1000 | 2000  |
| 2 | 20 | 200 | 2000 | 10000 |

**40. Решение.** Можно, например, рассмотреть 50 диагоналей  $A_1A_4, A_3A_6, A_5A_8, \dots, A_{97}A_{100}, A_{99}A_2$ . Они пересекаются в пятидесяти точках, которые удовлетворяют условию.

**41. Указание.** Произведение таких чисел имело бы на 1 знак больше, чем ему положено.

**Ответ.** Нет.

**42. Решение.** Заметим, что  $P^n(0) = P^n(1) = 2^n$ . По теореме Лагранжа производная  $Q(x)$  многочлена  $P^n(x)$  принимает значение 0 на интервале  $(0; 1)$ . Поскольку не все коэффициенты многочлена  $Q(x)$  равны 0, у  $Q(x)$  есть хотя бы один отрицательный коэффициент, а значит, и у  $P^n(x)$  тоже.

**43. Решение.** Обозначим через  $[M, ST]$  расстояние от точки  $M$  до прямой  $ST$ . Легко видеть, что утверждение задачи равносильно такому утверждению:  $\frac{[P, AB]}{[P, BC]} = \frac{[Q, AC]}{[Q, AA']}$ . Оно вытекает из двух утверждений, а именно:

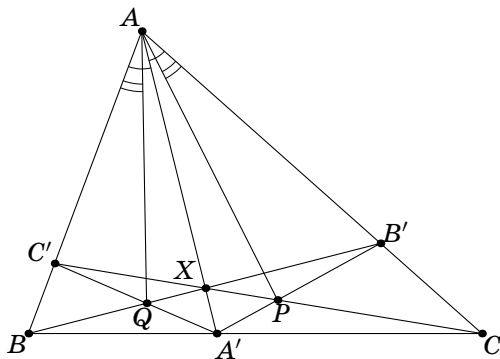
$$\frac{[P, AB]}{[P, BC]} = \frac{[Q, AC]}{[Q, BC]} \quad \text{и} \quad \frac{[P, AA']}{[P, BC]} = \frac{[Q, AA']}{[Q, AC]},$$

которые мы докажем по отдельности (см. рисунок).

В обоих случаях многократно применяется простая лемма: если даны три луча  $OL, OM$  и  $ON$ , то для всех точек  $K$  на луче  $OM$  отношение  $\frac{[K, OL]}{[K, ON]}$  одно и то же.

Теперь, поскольку  $X$  лежит на биссектрисе  $AA'$  и  $[X, AB] = [X, AC]$ , первое соотношение получается сразу из равенств

$$\frac{[P, AB]}{[P, BC]} = \frac{[X, AB]}{[X, BC]} = \frac{[X, AC]}{[X, BC]} = \frac{[Q, AC]}{[Q, BC]}.$$



Второе чуть сложнее. Исходя из леммы, получаем последовательно ряд равенств:

$$\frac{[X, AB]}{[X, BC]} = \frac{[X, AC]}{[X, BC]}, \quad \frac{[B', AB]}{[B', BC]} = \frac{[C', AC]}{[C', BC]}, \quad \frac{[B', AA']}{[B', BC]} = \frac{[C', AA']}{[C', BC]}$$

(здесь надо вторично использовать тот факт, что  $AA'$  — биссектриса),  $\frac{[P, AA']}{[P, BC]} = \frac{[Q, AA']}{[Q, BC]}$ , что и требуется.

**44. Решение.** Годятся все пары вида  $(9 \dots 98877, 8 \dots 87)$ , где в первом и втором числах поровну цифр.

Годятся также пары вида:

$$877 \dots 7 \ (k-1 \text{ семерка}) \quad \text{и} \quad 899 \dots 9987 \ (k-3 \text{ девятки}).$$

**45. Ответ.** Нет в обоих случаях (кузнечик не успеет пройти всю окружность).

**46. План решения.** 1) От противного: предположить, что существует маршрут, при котором каждое ребро проходится в разных направлениях.

2) Заметить, что тогда в каждой вершине муравей либо всегда поворачивает направо («правая вершина»), либо налево.

3) С другой стороны, разделив вершины произвольным образом на «правые» и «левые», мы однозначно определим маршрут или маршруты муравья (маршрут получается всегда, но он, возможно, несвязен, т.е. состоит из нескольких отдельных маршрутов).

4) Если все вершины правые, то получается 12 маршрутов (вокруг каждой вершины по часовой стрелке).

5) Изучить, что происходит при замене ориентации одной из вершин с правой на левую («перестройке»), и убедиться, что *четность числа маршрутов не меняется*.

## XXVIII Турнир городов (2006/07)

1. Ответ. *xy*.

2. Решение. а) Для начала зададим всем троим вопрос, ответ на который известен (на худой конец — верно ли, что дважды два — четыре). Если будет дано два неверных ответа, мы узнаем, кто говорит правду; если два верных — узнаем, кто врун. Дальнейшее уже просто.

б) Пусть  $A$  — врун,  $B$  — правдивый,  $C$  и  $D$  — хитрецы.  $C$  и  $D$  могут договориться: «будем отвечать так, как если бы  $A$  и  $B$  были хитрецами, ты вруном, а я — правдивым».

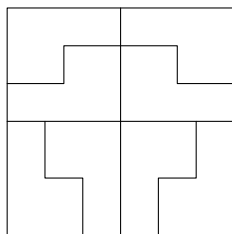
3. а) Решение. Число  $m$  не представимо в виде разности квадратов тогда и только тогда, когда  $m$  делится на 2, но не делится на 4. Если среди написанных чисел есть только одно четное, надо вычеркнуть его; если же их больше, то легко добиться, чтобы произведение делилось на 4.

б) Указание. Докажите (опираясь на приведенные соображения), что все остальные числа — нечетные.

4. Указание. Докажите, что  $\angle B'AM = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \angle B'CM$ .

5. Указание. Многоугольник, все стороны которого параллельны сторонам квадрата, можно расположить на плоскости не более чем восемью разными способами.

Ответ. На 8 (см. рисунок).



6. Ответ. *xyz*.

7. Указание. Центры четырех окружностей, вписанных в рассматриваемые треугольники, лежат на вписанной в четырехугольник окружности и являясь серединами дуг, стягиваемых соответствующими хордами.

**8. Решение.** Разобьем все числа от 1 до  $2006^2$  на 4 типа  $\{0, 1, 2, 3\}$  в зависимости от остатка при делении на 4 данного числа. Чисел каждого из типов имеется  $1003^2$  штук.

Допустим, искомые два числа не найдутся. Разобьем таблицу на  $1003^2$  квадрата  $2 \times 2$ . Любые два числа в одном квадрате имеют общую сторону или вершину. Поэтому в один квадрат не может попасть более одного числа типа 0, а также более одного числа типа 2. Но так как чисел каждого из этих видов ровно  $1003^2$ , то в каждый квадрат попадет ровно одно число типа 0 и одно — типа 2. В оставшихся двух клетках не могут стоять числа типа 1 и 3; в каждом квадрате стоит либо две единицы, либо две тройки. Следовательно, количество чисел каждого из этих типов четно. Противоречие.

**9. Указание.** Докажите сначала, что если три (хотя бы три!) последовательных члена геометрической прогрессии входят в арифметическую, то знаменатель прогрессии есть рациональное число. (А вот чтобы доказать, что оно целое, требуется уже знать, что в арифметическую прогрессию входит *бесконечное* число членов геометрической!)

**10. Указание.** Пусть ребро куба равно 1. Нужно взять три точки на ребрах, выходящих из одной вершины, на расстоянии  $3/4$  от нее, и три другие — аналогично для диаметрально противоположной вершины. Тогда все ребра октаэдра будут равны.

**Ответ.** Можно.

**11. Указание.** В формуле площади кольца основным сомножителем является  $R^2 - r^2$ , а длина стороны правильного многоугольника (независимо от числа его сторон) равна  $2\sqrt{R^2 - r^2}$ .

**12. Ответ.** Нет.

**Решение.** Одно из доказательств: характер схемы полностью определяется порядком точек — концов хорд вдоль окружности, поэтому если число гостей велико, то количество «графов знакомств» растет быстрее, чем число схем.

Впрочем, уже для 6 человек существует контрпример, а именно: граф знакомств — пятиугольная пирамида.

**13. а) Решение.** Один из способов:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} \text{первая} \\ \text{строка} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{третья} \\ \text{строка} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{первый} \\ \text{столбец} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{третий} \\ \text{столбец} \end{array} \right) = \\ = 2 \cdot \left[ \left( \begin{array}{c} \text{вторая} \\ \text{строка} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{второй} \\ \text{столбец} \end{array} \right) \right]. \end{aligned}$$

Раскрыв скобки и уничтожив одинаковые члены, получим в точности нужное равенство.

**б) Указание.** Докажите сначала, что  $e$  — среднее арифметическое всех чисел квадрата (и, тем самым, среднее арифметическое чисел любой строки, столбца и диагонали).

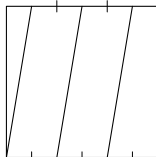
Отсюда легко следует, что все остальные числа могут быть выражены только через 2 параметра, а именно:  $\alpha = a - e$  и  $\beta = g - e$ . После этого достаточно подставить выражение  $a, b, \dots, i$  через  $e, \alpha$  и  $\beta$  и раскрыть скобки.

**14. Указание.** Вершины и точки касания разбивают периметр шестиугольника на 12 частей. Докажите, что шесть из них равны  $R$ , а шесть других — радиусам окружностей, вписанных в прямоугольные треугольники.

**Подсказка.** Диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с гипотенузой  $c$ , равен  $a + b - c$ .

**Ответ.**  $d_1 + d_2 + d_3 = Q - 6R$ .

**15. Указание. а), б)** Разделим горизонтальные стороны квадрата (картины) на  $n$  частей и обмотаем его как бы узкой лентой слегка наискосок. Ширина ленты должна быть такой, чтобы внизу были покрыты первые два отрезка деления, вверху — второй и третий, и так далее (см. рисунок). Легко видеть, что бесконечная лента покроет весь квадрат с обеих сторон.



Отсюда легко понять, как можно покрыть весь квадрат параллелограммом, меньшая сторона которого равна  $2/n$  (его площадь автоматически будет равна 2, поскольку он покрывает квадрат). Остается перекроить этот параллелограмм в прямоугольник.

**16. Решение.** Задача допускает различные решения. Одно из них: такими являются все числа вида  $n = 2 \cdot 3^k - 1$  (при переходе от  $n$  к  $n + 1$  множитель тройка сокращается).

**17. Решение.** Первый вопрос задается про две крайние карты, а второй — про 1-ю и 3-ю. Далее задаем вопросы о таких парах карт: 2-я и 51-я; 51-я и 49-я; 4-я и 50-я, 4-я и 6-я и т.д. При этом за 2 вопроса удастся определить положение трех карт.

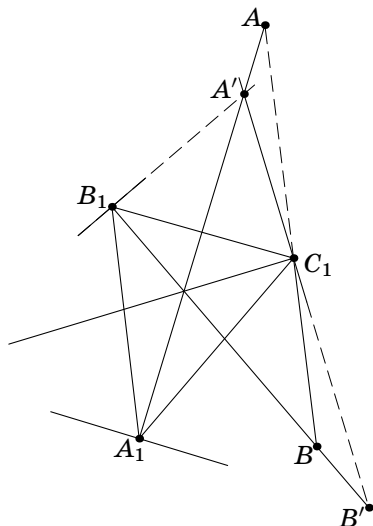
Покажем, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя. Построим граф: вершинами являются 52 карты, а ребром между парой карт — вопрос. Если вопросов-ребер только 33, то в графе не менее 19 компонент. Отсюда легко следует, что имеется либо две компоненты, состоящие из одной вершины-карты, либо ком-



понента, в которой ровно 2 вершины. В обоих случаях можно эту пару карт поменять местами, не трогая остальных: все ответы не изменятся. Тем самым порядок не восстанавливается однозначно.

**Ответ.** Требуется 34 вопроса.

**19. Решение.** Примем треугольник  $A_1B_1C_1$  за основу и попытаемся восстановить треугольник  $ABC$ . Восставим в точках  $B_1$  и  $C_1$  перпендикуляры к биссектрисам углов  $B_1$  и  $C_1$ . Эти перпендикуляры сами являются биссектрисами внешних углов; поэтому точка  $A'$ , в которой они пересекаются, лежит на биссектрисе внутреннего угла  $A_1$ . Аналогично строятся точки  $B'$  и  $C'$  на биссектрисах углов  $B_1$  и  $C_1$ . Таким образом, построен такой треугольник  $A'B'C'$ , что  $A_1, B_1$  и  $C_1$  лежат на его сторонах, причем  $A'A_1, B'B_1$  и  $C'C_1$  — высоты треугольника  $A'B'C'$  и биссектрисы треугольника  $A_1B_1C_1$ .



Остается доказать, что исходный треугольник  $ABC$  совпадает с построенным нами треугольником  $A'B'C'$ . Точка  $A$ , как и  $A'$ , лежит на биссектрисе угла  $A_1$ . Пусть  $A \neq A'$ , например, пусть  $A'$  лежит на отрезке  $AA_1$ , т.е.  $AA_1 > A'A_1$ . Поскольку отрезки  $AB$  и  $A'B'$  проходят через точку  $C_1$ , отсюда легко следует, что  $BB_1 < B'B_1$ . Аналогично мы получаем, что  $CC_1 > C'C_1$ , и наконец, что  $AA_1 < A'A_1$  — противоречие.

**20. Решение.** Предположим противное, пусть  $a$  записывается бесконечной периодической дробью с неким периодом  $m$ . Тогда

все цифры с номерами  $m, 10m, 100m, \dots, 10^k m$ , совпадают (может быть, кроме нескольких первых). Между тем это — последовательные цифры десятичного разложения иррационального числа  $m\sqrt{2}$ . Противоречие.

**21. Указание.** Объем всевозможных пирамид, основание которых лежит на одном из оснований, не превышает одной трети объема призмы.

**Ответ.** Нельзя.

**23. Решение.** Прежде всего заметим, что задача эквивалентна следующей: *ладья обходит доску  $4 \times 13$ , начиная с левого нижнего угла («туз пик», или поле a1), и побывав на каждой клетке по разу, возвращается на прежнее место; оценить число обходов.* Именно в этой формулировке мы будем решать задачу.

Произвольному обходу соответствует  $12!$  обходов, получающихся из него произвольной перестановкой чисел  $\{2, 3, \dots, 13\}$ . Например, если обход начинался так: a1, b1, b8, d8, d3, ..., а перестановка переводит  $8 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 6$ , то измененный обход будет начинаться: a1, b1, b4, d4, d6, ...

Теперь сопоставим произвольному обходу  $13!$  раскладок, получающихся из него перестановкой чисел  $\{1, 2, 3, \dots, 13\}$ . Например, если перестановка переводит  $1 \rightarrow 4, 8 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 7$ , то выше приведенный обход перейдет в такой: a4, b4, b2, d2, d7, ...

Этот обход нехорош тем, что начинается не там, где следует. Однако, поскольку он проходит через все клетки, включая клетку a1, то мы имеем право начать получившийся обход именно с этой клетки. Таким образом, мы сопоставили каждому обходу набор из  $13!$  обходов, и остается только проверить, что все построенные нами наборы по  $13!$  обходов попарно не пересекаются или совпадают; в случае а) это было очевидным, здесь — не вполне.

**24. а) Решение.** Из обоих неравенств следует, что сумма кубов по крайней мере в 4 раза больше суммы квадратов, откуда следует, что хотя бы один из иксов (а в оптимальном варианте — ровно 1) больше 4.

С другой стороны, первое неравенство можно переписать в виде

$$(4x_1 - 1)^2 + \dots + (4x_k - 1)^2 < k$$

и, учитывая, что одно из слагаемых не меньше, чем

$$(4 \cdot 4 - 1)^2 = 15^2,$$

можно сделать вывод, что  $k > 225$ , что значительно сильнее требуемого неравенства.

**б) Решение.** Положим

$$n = k - 1, \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n = b, \quad x_k = A.$$

Прямая проверка показывает, например, что годятся такие наборы чисел  $(n, A, b)$ :

— более простой:  $n = 1600, A = 10, b = 1/4$ ,

— более экономный, но и более сложный:  $n = 600, A = 5,125, b = 0, 1$ .

**в) Ответ.**  $k = 516$ .

**План решения.**

1) Доказать, что если в наборе, удовлетворяющем условию, есть два числа  $a > b > 1$ , то их можно заменить на другие числа  $a', b'$  так, что первое неравенство останется неизменным (т.е. разность между правой и левой частью не изменится), второе усилится, и при этом будет  $b' = 1/4$ .

Таким образом, достаточно рассматривать случай, когда только одно число больше 1.

2) Доказать, что все числа, кроме наибольшего, можно заменить на равные, причем также первое неравенство останется неизменным, а второе усилится. Таким образом, мы окажемся в ситуации, описанной в пункте б).

3) Выяснить, при каких  $A, b$  можно сделать  $k$  наименьшим. Годятся, например, числа  $b = 1/8, A = 5,169$ .

**25. Ответ.** Да, обязательно.

**26. Решение.** Обозначим полученное вычеркиванием 2000-значное число через  $M$ . Вставим 14 закладок между цифрами  $M$  там, где были вычеркнуты цифры: красные — вместо цифр  $K$  и синие — вместо цифр  $C$ . При обратной замене всех закладок на соответствующие цифры получим 2014-значное число  $B$  (если две или более закладок лежат рядом, надо еще проследить за порядком обратных замен, если нет — порядок не имеет значения).

**27. Ответ.** а) 4 ладьи, б) 5 ладей.

**Решение.** а) Так как с любого поля ладья бьет не более 8 белых клеток, трех ладей недостаточно. Четыре ладьи можно поставить на поля  $a1, c3, e5$  и  $g7$ .

б) Занумеруем вертикали и горизонтали цифрами от 1 до 9. Достаточно поставить ладьи на поля  $(1, 8), (3, 6), (5, 4), (7, 2)$

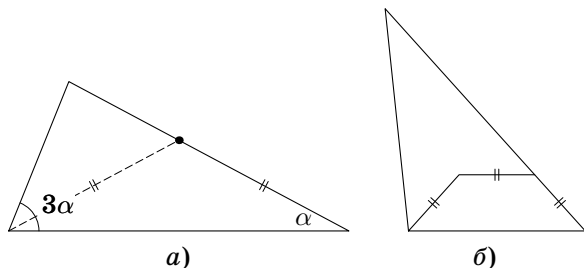
и (9, 2). Четырех ладей недостаточно, так как всего белых клеток 41, а ладья с любого поля бьет не более 9 белых клеток.

**28. Решение.** Нулевых корней, очевидно, нет, так как все свободные члены ненулевые. Допустим, что у одного из трехчленов оба корня отрицательные. Тогда из теоремы Виета следует, что все три наших числа — одного знака. Но в таком случае легко убедиться, что у одного из трехчленов дискриминант  $b^2 - 4ac$  отрицателен, а это противоречит условию.

**Ответ.** Верно.

**29. Подсказка.** В случае а) от исходного треугольника отрезается треугольник с двумя равными сторонами, в случае б) — четырехугольник с тремя равными сторонами и двумя равными углами (два других тоже равны, поскольку это трапеция, но это уже неважно). В случае в) надо отрезать шестиугольник с пятью равными сторонами и четырьмя равными углами между ними.

**Решение.** Способы разрезания в случаях а), б) показаны на рисунке. В случае в) аналогичный способ найдите сами.



**31. Решение.** Если  $x_1, x_2, x_3$  — три корня многочлена  $P(x)$ , то

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Подставляя  $x = 1$ , получаем:

$$1 + p + q + r = P(1) = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3).$$

Каждый из сомножителей по модулю меньше 1, поэтому

$$-1 < 1 + p + q + r < 1,$$

что равносильно утверждению задачи.

**32. Решение.** Пусть прямые  $AB$  и  $A'B'$  пересекаются в точке  $K$ . На прямой  $AB$  рассмотрим такую точку  $L$ , что точка  $A$  делит

отрезок  $LB$  пополам.

$$AL : A'B' = 1 = KA : KA',$$

следовательно прямые  $AA'$  и  $LB'$  параллельны и прямая  $AA'$  содержит среднюю линию треугольника  $LBB'$ , а значит, проходит через середину стороны  $BB'$ .

**Замечание.** Случай, когда  $AB \parallel A'B'$ , очевиден в силу центральной симметрии. В случае когда точка  $L$  совпадает с  $K$ , она совпадает и с  $B'$ , и серединой отрезка  $BB'$  служит точка  $A$ .

**Замечание для знатоков.** Воспроизведено доказательство частного случая теоремы Менелая, из которой утверждение задачи следует мгновенно.

**33. Решение.** Пусть последовательность имеет период  $d < 10^n$ . Суммы цифр чисел  $10^n$  и  $10^{n+1}$  равны единице, а суммы цифр чисел  $10^n - d$  и  $10^{n+1} - d$  отличаются на 9, т.е. имеют разную четность. Противоречие.

Сравните с задачей 47.

**35. Ответ.** Всегда.

**Замечание-указание.** Для нецелых  $N$  это неверно; например, ближайшим квадратом к числу  $N = 6,4$  является число 4, т.е. согласно предложенному правилу корень приближенно равен 2 — тогда как в действительности  $\sqrt{N} \approx 2,53$  ближе к трем. Причина в том, что если  $N$  лежит между  $a^2$  и  $(a+1)^2$  (тогда искомым приближением будет либо  $a$ , либо  $a+1$ ), то точка

$$\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = a^2 + a + \frac{1}{4}$$

не делит отрезок  $[a^2, (a+1)^2]$  точно пополам. В то же время она достаточно близка к середине этого отрезка  $a^2 + a + \frac{1}{2}$ , чтобы делить множество *целых чисел* так, как нужно.

**36. Решение.** Пусть катеты первого треугольника равны  $a$  и  $b$ , а гипотенуза —  $c$ . Тогда

$$1 - a - b = c; \quad (1 - a - b)^2 = c^2;$$

раскрывая скобки, получаем  $2ab - 2a - 2b = -1$ . Удвоенная площадь второго треугольника равна

$$2S = (1 - a)(1 - b) = 1 + ab - a - b = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

отсюда  $S = 1/4$ .

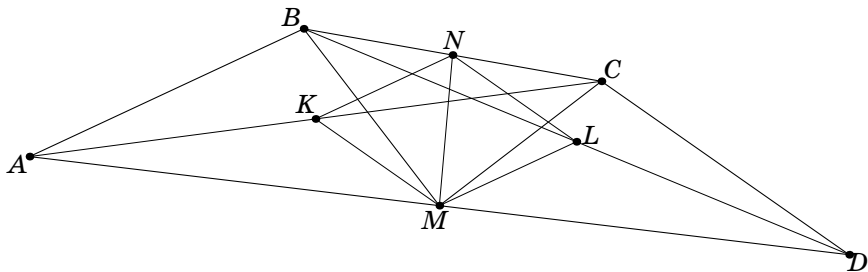
**37. Ответ.** Могло. Например, Вася написал (по порядку) числа 2, 3, 4, ..., 22, а Петя — числа 23, 4, 5, ..., 22.

**38. Указание.** Докажите, что ни одна диагональ не может пересекать сразу две других.

**Ответ.**  $2n - 4$  при четном  $n$ , и  $2n - 5$  при нечетном  $n$ .

**39. Ответ.**  $\{2, 3\}$  и  $\{3, 5, 7\}$ .

**40. Указание.** Пусть  $N$  — середина стороны  $BC$ ,  $K$ ,  $L$  — середины диагоналей. Докажите сначала, что треугольники  $MNK$  и  $MNL$  — равносторонние, со стороной, равной половине  $AB$ .



**Ответ.**  $30^\circ$ .

**41. Решение.** а) Может. Фукс за 52 тура называет  $52^2$  карт — в каждом туре все карты по разу в одном и том же порядке, после чего говорит «стоп». Заметим следующее.

1) Всякий раз карты передвигаются в одном направлении: если передвинута карта  $a$ , то до того, как карта  $a$  будет названа в следующий раз, будут перечислены все карты. В их числе будет карта  $b$ , которая стоит по другую сторону от свободного места напротив  $a$ , и она будет передвинута в ту же сторону.

2) В каждом туре хотя бы одна карта сдвинется, значит, сдвигов не менее 52, и каждая карта со своего места уйдет.

3) С другой стороны, каждая карта сдвинулась не более 52 раз, поэтому полный круг (53 хода) она сделать не успеет и на свое место не вернется.

б) Не может. Для любой последовательности названных карт есть начальная позиция, которая в результате перейдет в позицию с тузом возле свободного места. Дело в том, что назвав карту повторно, мы «откатываем назад» предыдущий ход. Назвав всю последовательность карт в обратном порядке, мы «откатаем» финальную позицию до исходной. Примем за финальную любую

позицию с тузом возле свободного места и откатаем ее. Получим исходную позицию, не выигрышную для данной последовательности карт.

**42. Ответ.**  $ab/c$ .

**43. Ответ.** Не следует. Простейшие контрпримеры:

- 1) полукруг радиуса 1;
- 2) линза, ограниченная двумя дугами по  $120^\circ$  радиуса 1.



**44. Указание.** Если степень  $f(x)$  нечетна, то достаточно большие значения многочлен принимает только 1 раз. Если же степень четна, то число точек экстремума нечетно (докажите!) и одно из значений, принимаемых в этих точках, принимается нечетное число раз.

**Ответ.** Нет.

**46. Указание.** Описанный в условии многогранник можно получить следующим образом: отметить в пространстве все точки, у которых все три координаты одной четности, и затем рассмотреть множество  $P$  точек пространства, для которых точка  $(0, 0, 0)$  является ближайшей среди отмеченных.

**Ответ.** Можно.

**47. а) Указание.** Нужно последовательно доказать:

- 1) что в последовательности имеется член, который меньше  $1/3$ ,
- 2) что есть член меньше  $1/4$ ;
- 3) меньше  $1/5$ ;
- 4) меньше  $3/16$ .

Пример. Чтобы доказать, что есть член меньше  $1/4$ , следует рассмотреть член вида

$$\lambda_n = \frac{1}{3} - \alpha; \quad \text{если } \alpha > \frac{1}{12},$$

то  $\lambda_n$  уже меньше  $1/4$ , в противном же случае легко убедиться, что

$$\lambda_{n+2} = \frac{1}{3} - 4\alpha.$$

**б) Ответ.** Может.

**Решение.** Для построения такого числа заметим, что если некоторое число  $\lambda$  записано в двоичной системе, то

1) оно иррационально тогда и только тогда, когда запись  $\lambda$  непериодична;

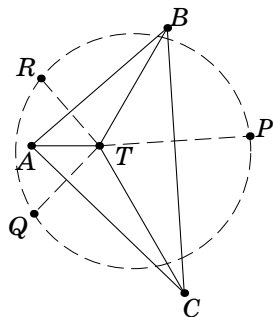
2) число  $\lambda_n$  всегда получается одним из двух способов: либо у числа  $\lambda$  отбрасывается несколько первых знаков, либо та же операция проводится с числом  $1 - \lambda$ .

В двоичной записи число  $7/40$  имеет вид  $0,00101100110011\dots$  (период 0011).

Составим число  $\lambda = 0, \dots$  из непериодически повторяющихся групп цифр  $\{00101101\}$  и  $\{0011\}$ . При этом дополняющее его до единицы число  $1 - \lambda$  будет строиться из групп  $\{11010010\}$  и  $\{1100\}$ . Легко убедиться, что, сколько бы цифр мы ни отбросили у числа  $\lambda$  или  $1 - \lambda$ , первые цифры полученного числа будут больше, чем у числа  $7/40$ .

Сравните с задачей 33.

**48. Указание.** Пусть  $P, Q, R$  — точки, симметричные  $T$  относительно сторон треугольника. Тогда искомая точка  $O$  есть центр описанной вокруг треугольника  $PQR$  окружности. Соответственно, прямые, симметричные  $AT, BT$  и  $CT$ , — это прямые  $PO, QO$  и  $RO$ .





## XXIX Турнир городов (2007/08)

**1. Указание.** На любой горизонтали число фишек делится на 3 и, соответственно, не больше шести.

**Ответ.** 48 фишек.

**3. Ответ.** Нет.

**4. Ответ.** 15.

**Указание.** Для того чтобы условие задачи выполнялось, необходимо, чтобы в нижней части таблицы (под диагональю) стояли только числа от 1 до 14, а в верхней — от 16 до 29.

**6. Решение.** Для каждого фрагмента зафиксируем рациональное число, большее роста ребенка, но меньшее роста взрослого. Представим эти числа в виде обыкновенных дробей и приведем их все к общему знаменателю. Затем уменьшим размеры каждого фрагмента в число раз, равное числителю соответствующей ей дроби.

**7. Ответ.** Можно в обоих случаях. Например, в случае а) можно последовательно получить числа

$$\frac{1}{x}, \quad x+1, \quad \frac{1}{x+1}, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2+x}, \quad x^2+x, \quad (x^2+x) - x = x^2.$$

**8. Указание.** Площадь треугольника  $ABC$  не зависит от положения точки  $C$ , поэтому произведение  $AC \cdot BC$  будет наименьшим, если  $\sin C$  будет наибольшим.

**Ответ.** Если окружность, построенная на  $AB$ , как на диаметре, пересекается с прямой, то точки пересечения — искомые (задача имеет два ответа). В противном случае искомая точка  $C$  лежит на срединном перпендикуляре к  $AB$ .

**9. Решение.** б) Будем считать, что номера идут по кругу (после 29 опять идет единица). Один из способов таков: ассистент указывает карточки, смежные с выбранными, притом «окаймляющие» их. Например, если выбраны карточки 7 и 26, то «окаймляющими» будут 25 и 8.

а) Годится тот же способ. Если зритель выбирает два смежных номера (напр. 4 и 5), то «окаймляющие» — это 3 и 1 (несмежные), если же номера несмежны, то «окаймляющие», наоборот, будут смежными.

**10. Ответ.** а) Нет, б) да, в) нет.

**Решение.** б) Отрежем от квадрата полосу ширины  $\frac{1}{8}$ , а оставшийся прямоугольник  $1 \times \frac{7}{8}$  разделим на два прямоугольника

$\frac{1}{2} \times \frac{7}{8}$ . Квадрат диаметра каждого из трех равен  $\frac{65}{64}$ , и диаметр  $d \approx 1,0078$  меньше 1,01.

**Указание.** а), в) Докажите, что оценка  $d = d_0 = \frac{\sqrt{65}}{8}$  является точной. Воспользуйтесь тем, что две вершины квадрата входят в один многоугольник.

**11. Решение.** Четырехугольник  $ABKD$  — равнобедренная трапеция. Точка  $G$  пересечения ее диагоналей лежит на серединном перпендикуляре к основанию  $AB$ . В силу симметрии ромба  $ABCD$  относительно диагонали  $BD$ , точка  $G$  лежит также на серединном перпендикуляре к  $BC$ , то есть совпадает с точкой  $F$ .

**12. а) Указание.** Рассмотрите произвольное простое  $p$  и выясните, в каких степенях оно может входить в написанные числа.

**б) Ответ.** Нет. Например, если Петя задумал числа 6, 10, 15, 30, а Вася — числа 1, 2, 3, 5, то оба выпишут наборы 2, 3, 5, 6, 10, 15. (Таких примеров сколько угодно: если Вася задумает четыре взаимно простых числа  $a, b, c, d$ , а Петя — их произведения по три штуки, то есть числа  $abc, abd, acd, bcd$ , то в итоге оба напишут наборы  $ab, ac, ad, bc, bd, cd$ .)

**13. Ответ.** Миша может уйти с лужайки.

**Указание.** Если  $O$  — центр лужайки, а Миша стоит в некоторой точке  $A$ , то ему следует всякий раз объявлять направление, перпендикулярное вектору  $OA$ .

**14. Ответ.** При  $N = 1$  выигрывает первый, в остальных случаях — второй.

**15. Ответ.** Всегда.

**17. Решение.** Первая буква любого текста «порождает» как минимум двухбуквенное слово (иначе первое слово всегда будет состоять из одной буквы). Пусть  $T_k$  — текст после  $k$  шагов. Поскольку в русском языке 33 буквы, не позднее чем с 34-го хода начало текста будет совпадать с началом более раннего текста.

Первая буква  $L$  текста  $T_{35}$  «порождает» минимум 5 первых букв в тексте  $T_{39}$ , а в тексте  $T_{40}$  — первые 5 слов, то есть весь данный в условии фрагмент. Поскольку буква  $L$  на первом месте встречалась и раньше, то некоторый текст  $T_k$  ( $k < 40$ ) также начинался со слов РЯД КОРАБЛЕЙ НА ДРЕМЛЮЩИХ МОРЯХ. Первые две буквы РЯ этого текста порождают в тексте  $T_{40}$  весь указанный фрагмент (почему?). Но  $T_k$  содержит и еще один фрагмент РЯ (в слове МОРЯХ), который и порождает в  $T_{40}$  второе вхождение нашего фрагмента.

**19. Решение.** Пусть  $K, L, M, N$  — середины сторон  $AB, BC, CD, AD$  четырехугольника  $ABCD$  соответственно. Треугольники  $BAK$  и  $CDP$  подобны по двум углам, поэтому подобны и их «половинки»  $KAP$  и  $MDP$ . Следовательно,  $\angle APK = \angle DPM$ .

Средние линии треугольников  $ABC$  и  $BCD$  параллельны, значит,

$$\angle LKP = \angle APK = \angle DPM = \angle LMP$$

( $KL \parallel AC, ML \parallel BD$ ).

Итак, углы  $LKP$  и  $LMP$ , опирающиеся на отрезок  $LP$ , равны. Значит, равны и радиусы описанных окружностей треугольников  $PKL$  и  $PLM$ . Остальные равенства доказываются аналогично.

**20. Ответ.** Только прогрессия  $1/6, 1/3, 1/2$ .

**22. в) Ответ.**  $N = 2^m$ .

**23. Указание.** Докажите, что

$$(P, Q) = \frac{1}{2} \sum a_i b_j \sin \varphi_{ij},$$

где  $a_i$  — стороны  $P$ ,  $b_j$  — стороны  $Q$ ,  $\varphi_{ij}$  — угол между  $a_i$  и  $b_j$ . Поскольку это выражение симметрично относительно  $P, Q$ , отсюда следует, что  $(P, Q) = (Q, P)$ .

**24. Ответ.** а)  $\frac{2^{100}}{100}$ ; б)  $\frac{2^{100}}{C_{100}^n}$ .

**25. Решение.** Так как  $ABDE$  — параллелограмм,  $\angle CBD = \angle FEA$ , а  $\angle BDC = \angle EAF$  как углы с соответственно параллельными сторонами. Следовательно, треугольники  $BCD$  и  $EFA$  равны по стороне и двум углам.

**26. Ответ.** 10 точек.

**Указание.** На каждом отрезке лежит не более 2 точек, притом каждая точка принадлежит не менее чем двум отрезкам.

**27. Решение.** Пусть  $a < b < c$ . Отметим на числовой оси всевозможные суммы чисел на пяти карточках. Из условия следует, что отмеченные точки расположены симметрично относительно 0. Отсюда следует, что наибольшая сумма ( $5c$ ) симметрична наименьшей ( $5a$ ), значит,  $5a + 5c = 0$ , то есть  $c = -a$ . Противоположны и суммы, ближайшие к «крайним», то есть  $(4a + b) + (4c + b) = 0$ . Отсюда сразу следует, что  $b = 0$ .

**28. Ответ.**  $n = 1, 2$ .

**Указание.** Предположим, что

$$(n+1)! = k(1! + \dots + n!).$$

Тогда в правой части второй сомножитель — нечетное число, так что  $k$  и  $(n+1)!$  делятся на одну и ту же степень двойки.

**29. Решение.** а) Разрежем доску на 50 прямоугольников  $1 \times 2$ . Ровно 20 из них содержат красные клетки, а остальные 30 — белосиние.

б) Расположим 40 сине-белых прямоугольников, как показано на рис. 1, оставшиеся 20 клеток сделаем красными.

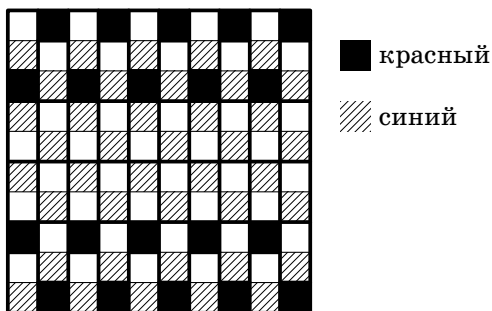


Рис. 1.

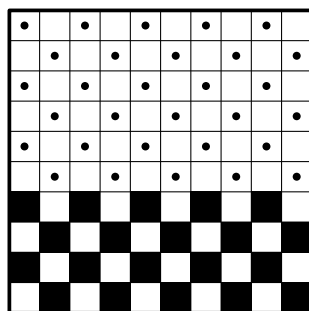


Рис. 2.

в) Окрасим 20 клеток в красный цвет, а также отметим 30 клеток, как на рис. 2. Каждый сине-белый прямоугольник, очевидно, должен содержать отмеченную клетку, следовательно их не больше 30.

**31. Ответ.** Нет, не может,

**Указание.** Пусть  $M$ ,  $N$  — соответствующие числа,  $M = 2008N$ . Поскольку 2008 не делится на 3,  $M$  не имеет (по сравнению с  $N$ ) ни одного дополнительного множителя 3, но в то же время имеет три дополнительных двойки (2008 делится на 8). Докажите, что эти факты противоречат один другому.

**32. Решение.**  $MP$  — диаметр указанной окружности (он перпендикулярен хорде  $AC$  и делит ее пополам). Значит, угол  $BSP$  прямой, то есть  $PC \parallel AN$ . Продолжим  $CP$  и  $BA$  до пересечения в точке  $N$ .  $MP$  — средняя линия треугольника  $BCN$ , то есть прямая  $BP$  делит сторону  $NC$  пополам. Следовательно, она делит пополам и сторону  $AN$  подобного треугольника  $BNA$ .

**33. Указание.** Каждая из трех копий содержит центр квадрата.

**34. Ответ.**  $7! \cdot 6!$ .

**35. Указание.** а) Нужно приписать 25.

б) Если это можно сделать разными способами, то разность между соответствующими квадратами меньше 100. Но с ростом  $N$  разность между соседними квадратами увеличивается.

**36. Решение.**

$$\angle COM = \angle AOK = \angle AKO, \quad \angle KCM = \angle CKM = \angle ACK,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \angle AMC &= 180^\circ - \angle COM - \angle KCM = \\ &= 180^\circ - \angle AKC - \angle ACK = \angle KAC = \angle BKM. \end{aligned}$$

Следовательно, треугольники  $AMC$  и  $BKM$  равны по стороне ( $MC = KM$ ) и двум прилежащим углам, и  $AM = BK$ .

**37. Ответ.** Это возможно тогда и только тогда, когда  $N = 2^k - 1$  для какого-нибудь  $k$ .

**Указание.** Считаем, что клетки занумерованы от 1 до  $N$ . Если кузнечик сидит в клетке, номер которой делится на  $2^n$ , можно указывать числа так, чтобы после прыжка ее номер делился на  $2^{n+1}$ .

**38. Указание.** Обозначим цвета цифрами: 1, 2, 3, 4. Искомые являются, во-первых, наименьший по площади треугольник из всех треугольников с вершинами разных цветов (пусть цвета его вершин — 1, 2, 3); во-вторых, наименьший «разноцветный» треугольник, имеющий вершину цвета 4 (пусть цвета двух других его вершин — 1 и 2); наконец, наименьший «разноцветный» треугольник, имеющий вершины цветов 3 и 4.

**39. Ответ.** Через 98 минут (бросков).

**Решение.** Занумеруем детей и мячики по часовой стрелке от 1 до 99.

*Пример.* Пусть мальчики 1 и 2 перебрасывают первый мячик друг другу. Остальные мячики с нечетными номерами всегда перекидываются против часовой стрелки, пока не попадают ко второму мальчику, который их выбрасывает (это происходит через нечетное число минут, и он в этот момент получает еще первый мячик). Мячики с четными номерами перекидываются по часовой стрелке, пока не попадают к первому мальчику, который их выбрасывает (после четного числа минут первый мячик к нему возвращается). Нетрудно видеть, что после 98 бросков все мячики, кроме первого, будут выброшены.

*Оценка.* Нам удобнее считать, что мячики не теряются, а склеиваются (с сохранением всех номеров) и собираются в конце кон-

цов у первого мальчика. Пусть есть способ собрать у него все мячики за  $n$  минут. Если  $n$  нечетно, первый мячик обошел полный круг (в противном случае он возвращается к первому мальчику только через *четное* число минут), то есть  $n \geq 99$ . Если же  $n$  четно, то второй мячик обошел полный круг без одного шага (иначе он попадает к первому мальчику только через нечетное число минут), то есть  $n \geq 98$ .

**40. Ответ.** Да, существуют.

**Указание.** Решите сначала систему линейных уравнений

$$\begin{cases} ax + cy = 1, \\ cx + ay = 2008 \end{cases}$$

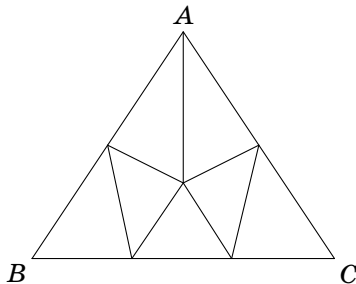
относительно  $x$  и  $y$ , а затем подберите  $a$ ,  $c$  так, чтобы  $x$  и  $y$  оказались числами вида  $\frac{1}{n}$ .

**41. Ответ.** Только  $87^\circ$ .

**42. Ответ.** а) Не может, б) может.

**Решение.** а) Для того чтобы все углы были меньше  $70^\circ$ , требуется непременно разрезать угол  $\alpha$ . После этого появится угол, который не больше  $35^\circ$ . Ясно, что в дальнейшем он никуда не исчезнет (если его разрезать, он станет только меньше). Но если в треугольнике один угол не превышает  $35^\circ$ , то один из двух других не меньше, чем  $(180^\circ - 35^\circ)/2 > 70^\circ$ .

б) Предположим, что треугольник равнобедренный, т.е. в нем один угол (пусть это угол  $A$ ) равен  $80^\circ$ , а два угла  $B, C$  — по  $50^\circ$ . Проведя биссектрису угла  $A$ , мы получаем два угла по  $40^\circ$ . Далее можно нарисовать картинку, в которой все углы не превосходят  $75^\circ$  (см. рисунок).



**43. Ответ.** Для чисел  $P = \frac{r}{2^k}$  (и только для них). — (Смотри указание к задаче 37).

**44. Указание.** Можно считать, что наш многочлен приведенный:

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots$$

Используя формулы Виета, нетрудно показать, что

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = a_1^2 - 2a_2.$$

Аналогично легко выразить сумму квадратов корней производной через  $a_1, a_2$ , отсюда можно выразить  $y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2$  через  $x_1 + \dots + x_n$  и  $x_1^2 + \dots + x_n^2$ . После тождественных преобразований наше неравенство приводится к виду

$$\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} > \left( \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^2.$$

Это известное неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим (строгое для различных чисел).

**45. Указание.** Убедитесь сначала, что существуют только два принципиально разных четырехугольника, удовлетворяющих условию (остальные им подобны).

**46. Ответ.** Нет, не обязательно.

**Указание.** Можно, например, строить последовательность таким образом:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ , а далее ее нечетные члены имеют вид  $N!$ , где  $N$  растет достаточно быстро, а четные — все последовательные числа от 1 и далее (исключая использованные ранее).

**47. Решение.** Существует ровно  $2^{11}$  11-разрядных последовательностей из 0 и 1, из них с четным числом единиц — ровно половина, то есть  $2^{10} = 1024$ . Закодируем 1000 цветов тысячей таких последовательностей. Распределим разряды между мудрецами. Мудрец номер  $k$  действует так: среди видимых им 10 цветов колпаков подсчитывает число  $a_k$  тех, у кого в  $k$ -м разряде стоит 1. Если это число четно, он показывает черную, а иначе — белую карточку.

После этого каждый мудрец может вычислить все разряды в коде цвета своего колпака, кроме одного — за который он сам отвечает. Для этого он подсчитывает число  $b_k$  единиц в  $k$ -х разрядах девяти мудрецов (кроме себя и мудреца номер  $k$ ), и если четность  $b_k$  совпадает с показанной четностью  $a_k$ , у него в  $k$ -м разряде 0, иначе 1. Недостающий разряд восстанавливается благодаря четности общего числа единиц в коде.

**48. Указание.** Утверждение очевидно следует из следующих двух утверждений (докажите их!).

**Утверждение 1.** *Основание перпендикуляра, опущенного из середины линии центров двух окружностей на прямую, высекающую на этих окружностях равные хорды, лежит на радикальной оси этих окружностей.*

**Утверждение 2.** *Если основания перпендикуляров, опущенных из точки  $M$  на стороны треугольника, лежат на одной прямой, то точка лежит на описанной окружности этого треугольника.*



## XXX Турнир городов (2008/09)

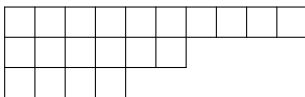
**1. Указание.** Начните с той коробки, в которой наименьшее число карандашей, и дальше двигайтесь по возрастанию.

**2. Ответ.**  $1 + 2 + \dots + 50 + 25 \cdot 50 = 2525$ .

**3. Указание.** В качестве точек  $B_i$  следует выбрать середины соответствующих дуг.

**5. Указание.** Если старт был дан в момент  $t = 0$ , а первая встреча произошла в момент  $t = 1$ , то следующие встречи будут происходить в моменты  $t = 2$ ,  $t = 3$  и т. д.

**6. Указание.** Изобразите все пирожные диаграммой вида



(в строках — число пирожных в коробках, по убыванию) и дайте интерпретацию числам, записанным Сережей.

**7. Ответ.**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ .

**8.** См. указание к задаче 3.

**9. Ответ.** Да, существует в обоих случаях.

**10. Указание.** Раскрасим сначала клетчатую бумагу в 4 цвета естественным образом (так, что каждый квадрат  $2 \times 2$  будет раскрашен в 4 цвета и при этом условие задачи для клеток будет выполняться). Тогда все 4 угла каждого из наших прямоугольников будут иметь один и тот же цвет (почему?), и, раскрасив теперь весь прямоугольник в этот цвет, мы получим требуемую раскраску.

**11. Решение.** Допустим противное.

Разобьем доску на 4 квадрата  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , каждый  $50 \times 50$ , и пусть  $D$  — пустой квадрат. Если при этом в квадрате  $A$ , противоположном  $D$ , есть хоть один ферзь, то он занимает одну из 50 горизонталей квадратов  $A$ ,  $B$  и одну из 50 вертикалей квадратов  $A$ ,  $C$ . Поэтому для остальных ферзей остается только 49 горизонталей и 49 вертикалей, чего недостаточно.

|     |     |
|-----|-----|
| $A$ | $B$ |
| $C$ | $D$ |

Если же квадрат  $A$  также пуст, то квадраты  $B$  и  $C$  имеют в совокупности только 99 диагоналей, которых недостаточно, чтобы разместить 100 ферзей.

**12. Решение.** Сделать это можно. Например, разложим камни  $a, b, c, d$  следующим образом: первое взвешивание:  $a, b, c$  против  $d$ , второе —  $b, c, d$  против  $a$ , третье —  $c, d, a$  против  $b$  и четвертое —  $d, a, b$  против  $c$ . Есть и другие решения.

**13. Ответ.** 1 : 2.

**Указание.** Постройте треугольник  $ABC$  до параллелограмма  $ABCD_1$ , продлив медиану за точку  $D$ .

**14. Ответ.** Да, такие карты существуют.

**15. Указание.** Надо прежде всего заметить, что произведение будет максимальным, если все числа равны, т. е.

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{2n}.$$

**16. Ответ.**  $\angle AC_1B = 2\varphi$ .

**17. Указание.** Составим таблицу вида

| 1   | 2 | 3  | 4 | 5 | 6  | 7  | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | ... |
|-----|---|----|---|---|----|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1   |   | -1 |   | 1 |    | -1 |   | 1 |    | -1 |    | 1  |    | -1 |    | 1  |     |
|     | 1 |    |   |   | -1 |    |   |   | 1  |    |    |    | -1 |    |    |    |     |
|     |   |    | 1 |   |    |    |   |   |    |    | -1 |    |    |    |    |    |     |
|     |   |    |   |   |    |    | 1 |   |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|     |   |    |   |   |    |    |   |   |    |    |    |    |    |    | 1  |    |     |
| ... |   |    |   |   |    |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |     |

— вверху стоят номера столбцов, а следующие строки заполнены: первая только для нечетных чисел, вторая — для чисел, делящихся на 2, но не на 4, и т. д.

Легко видеть, что очередное число  $a_n$  равно сумме всех чисел, стоящих в первых  $n$  столбцах.

Отсюда нетрудно получить оба утверждения задачи.

**18. Ответ.** 5 : 4.

**19. Ответ.** Нет, неверно.

**Решение.** Можно заполнить пространство кубиками стандартным образом, а затем сдвинуть шесть полос из кубиков, граничащих с данным, в разные стороны.

**20. Ответ.** Всегда выигрывает второй.

Для выигрыша ему достаточно до самого конца объединять имеющиеся кучки так, чтобы была одна большая кучка и не-

сколько кучек по одному ореху. Только на последних шагах надо немного изменить эту тактику.

**21. Указание.** Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей данной трапеции (она является также точкой пересечения диагоналей четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1$ ).

Если  $AB \parallel CD$ , то  $AO/OC = BO/OD$ . Докажите теперь, что аналогичное равенство имеет место и для точек  $A_1, \dots, D_1$ .

**23. Указание.** Пусть  $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots$ . Рассмотрите сначала случай, когда  $a_1 = 0$ , и докажите, что в этом случае график симметричен относительно начала координат. Общий случай можно свести к этому заменой переменной  $x \rightarrow \frac{x - a_1}{n}$  (учтите, что после этой замены целые решения уравнения  $P(m) + P(n) = 0$  превращаются в нецелые).

**24. Указание.** При первой попытке дадим произвольные ответы и узнаем, сколько из них неверных.

Далее разобьем наши 30 вопросов на группы  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_6$  по 5 вопросов. За один вопрос можно узнать, сколько в данной группе  $\Gamma_k$  было дано неверных ответов. При этом последнюю группу  $\Gamma_6$  проверять уже не надо (известно, сколько было неверных ответов всего, и сколько — в каждой из первых пяти пятерок).

Итак, после 6 вопросов все вопросы разделены на пятерки, и про каждую из них известно, сколько в первый раз было дано неверных ответов. Остается убедиться в том, что можно определить, какие ответы на вопросы данной пятерки правильны, всего за 3 вопроса, если уже известно, сколько в данной пятерке неверных ответов.

**25. Указание.** См. задачу 31.

**26. Указание.** Достаточно воспользоваться очевидным тождеством  $(a^b)^c = a^{bc} = (a^c)^b$  и взять  $a = 7$ ,  $b = 7$ ,  $c = 7^7$ .

**27. Ответ.** 50 кубиков.

**28. Ответ.** Могла. Например, можно взять число

6 666 669 999 990

(сумма цифр числа должна равняться 90, а переносов в разрядах при сложении  $a + 0,1a$  — одиннадцать).

**29. Указание.** Центральный угол  $NOM$  вдвое больше вписанного, т.е. равен  $60^\circ$ . Отсюда легко вывести, что при повороте вокруг  $O$  на  $60^\circ$  прямая  $BC$  переходит в прямую  $CD$ . Поэтому

точка  $O$  лежит на одной из биссектрис угла между  $BC$  и  $CD$ , т.е. на диагонали.

**31. Указание.** Условие и утверждение задачи равносильны (ср. с задачей 25). Для доказательства достаточно начать с прямой, которая лежит далеко и, следовательно, пересекает нуль отрезков (нуль — число четное), и посмотреть, что происходит, когда прямая, смещаясь параллельно самой себе, проходит через одну из данных точек.

**32. б) Ответ.** Это число будет наибольшим общим нечетным делителем  $a$  и  $b$ .

**33. Указание.** Если подряд стоят два нуля или две единицы, то их можно выбросить. При этом разность  $M - N$  не изменится.

**34. Указание.** Воспользуйтесь тем, что тетраэдр, образованный точками пересечения медиан, подобен исходному, а соответствующие 4 прямые в малом тетраэдре имеют общую точку  $X$ .

**35. Ответ.** Сможет. Проще всего каждый раз называть число  $\frac{1}{2008 \cdot 2009}$ .

**36. б) Ответ.** Найдется.

**Решение.** а), б) Можно взять квадрат, провести через его центр прямую, делящую сторону в отношении  $1:2$ , и в качестве искомого многоугольника взять одну из половин, на которые она делит квадрат. Тогда прямая, перпендикулярная проведенной и также проходящая через центр, делит многоугольник пополам, проходит через середину стороны (точка пересечения — центр квадрата), а другую сторону делит в нужном отношении.

**37. Ответ.** Нельзя.

**Решение.** Поскольку маршрут обратим, достаточно найти путь, которым машина смогла бы, начав путь в доме, выехать за пределы квадрата. Этого можно достичь при любой расстановке знаков, двигаясь, например, только влево или вверх.

**38. Ответ.** Нет, не обязательно. Например, рассмотрите последовательность

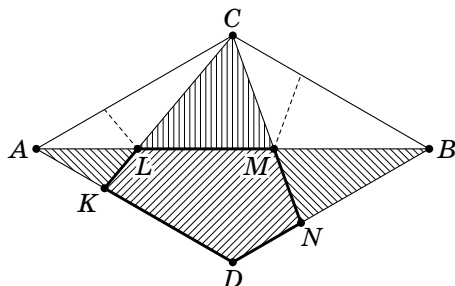
$$2, 4, 6, 9, \dots, (n-1)^2, (n-1)n, n^2, n(n+1), \dots$$

**39. Указание.** Рассмотрите сначала только рыцарей, идущих по часовой стрелке. Докажите, что они стоят не на всех башнях, между ними есть «брешь» (башня, на которой в данный момент нет ни одного такого рыцаря).

На протяжении ночи эта брешь смещается вместе с рыцарями по часовой стрелке.

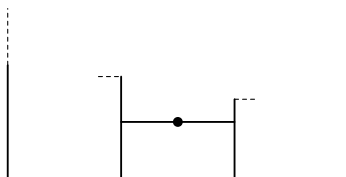
Поскольку для рыцарей, идущих против часовой стрелки, также существует брешь, останется только доказать, что в течение ночи будет час, когда бреши наложатся друг на друга. Это и будет нужный час.

**40. Решение.** Отразим данный треугольник относительно наибольшей стороны (т.е. стороны  $AB$ ). Получается ромб  $ACBD$ , составленный из двух равносторонних треугольников. Площадь пятиугольника  $KLMND$  дает площадь половины ромба как в сумме с площадью треугольника  $LCM$  (почему?), так и в сумме с площадями треугольников  $ALK$  и  $MBN$ , симметричных отсеченным отражениями лучей.



**41. Решение.** Пусть  $k < l$ . Подсчитав двумя способами количество  $N$  пар подмножеств  $A \subset B$ , где  $A$  имеет  $k$  элементов, а  $B - l$  элементов, мы получаем тождество  $C_n^l C_l^k = N = C_n^k C_{n-k}^{l-k}$ . Следовательно, правая часть делится на  $C_n^k$ . А так как  $C_l^k < C_n^k$ , то  $C_n^l$  должен иметь общий множитель с  $C_n^k$ .

**42. Ответ.** Нет, не может.



**Указание.** Рассмотрите самый «низенький» из прямоугольников, прилегающих к основанию исходного прямоугольника, и прямоугольник, содержащий середину его верхней стороны.

**44. Ответ.** 90.

**Указание.** В начальный момент есть 20 диагоналей, на которых стоит нечетное число фишек, и в дальнейшем их число не может уменьшиться.

**45. Указание.** Каждая грань параллелепипеда разбита на 4 четырехугольника. Докажите сначала, что если один из них вписанный, то и остальные вписанные.

**47. Ответ.** Выигрывает второй.

**Подсказка.** Для начала ему следует, взяв за основу первую точку  $A$ , выбранную первым, следующими ходами заполнить все точки, которые вместе с точкой  $A$  делят окружность на  $n$  равных частей (если первый заполняет часть этих точек — тем лучше).

**48. Указание.** Следует доказать более точное утверждение.

Пусть на шаге номер  $n$  в ячейку запишется число  $3n$ , и пусть на следующем шаге число увеличится на 1. Рассмотрим следующий шаг, при котором увеличение числа будет больше, чем на 1. Тогда после этого увеличения число опять-таки будет в три раза больше номера шага, и число, на которое произошло увеличение, — простое.

*Алексей Кириллович Толпыго*

**ТЫСЯЧА ЗАДАЧ МЕЖДУНАРОДНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ТУРНИРА ГОРОДОВ**

Подписано в печать 03.12.2009 г. Формат  $60 \times 90 \frac{1}{16}$ . Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Печ. л. 30,5. Тираж 2000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».  
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине  
«Математическая книга»,  
Большой Власьевский пер., д.11. Тел. (499) 241-72-85. E-mail: biblio@mcsmc.ru

---